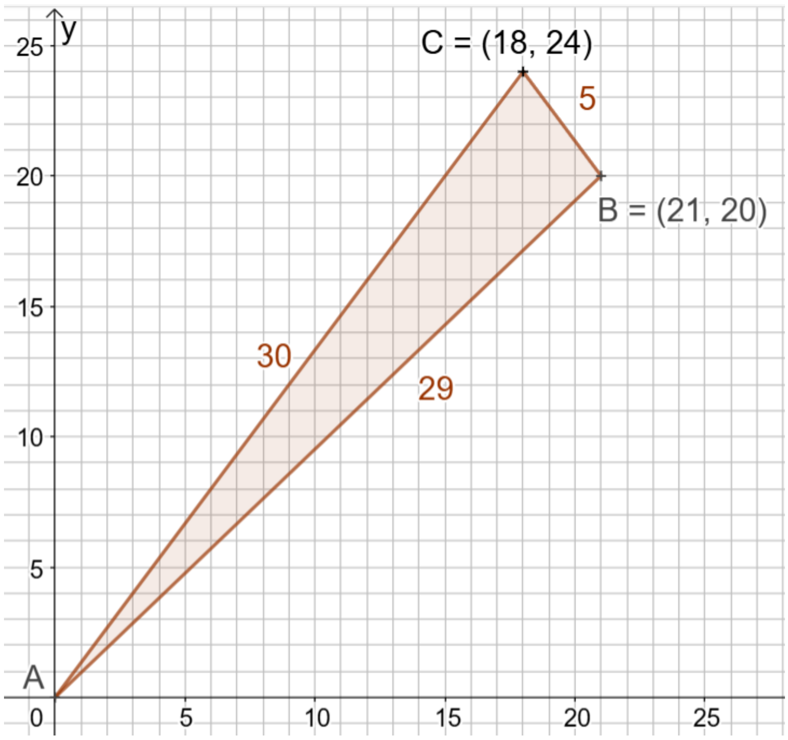
Uživatelsky přívětivé trojúhelníky



RNDr. Evžen Müller & žáci tercie osmiletého gymnázia
Julie Čepelková, Aneta Nekvindová a Matěj Zamouřil

Zemědělská akademie a Gymnázium Hořice

Ani jeden matematický talent nazmar 2026,
15.–16. května 2026, Hradec Králové

Úvodem

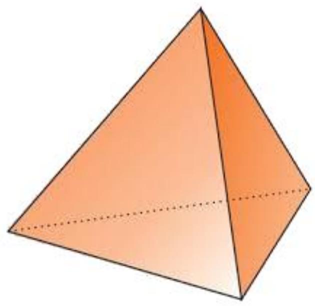
Na druhém stupni základní školy již mají žáci poměrně bohaté znalosti z geometrie. Jednou z oblastí, které se věnují, jsou mnohoúhelníky. Základním stavebním kamenem takových útvarů jsou trojúhelníky. Ty se žáci mimo jiné učí sestrojovat, poznávají jejich vlastnosti, hledají jejich těžiště, opisují či vepisují kružnice a řeší také nejrůznější úlohy početního charakteru. Což zahrnuje výpočet obvodu a obsahu, určování výšek, úhlů a leccos dalšího. Některé trojúhelníky se při provozování těchto činností mohou žákům jevit jako „uživatelsky přívětivější“ než jiné.

Rovnostranný trojúhelník

Mezi „uživatelsky přívětivé trojúhelníky“ žák zcela jistě zařadí trojúhelník rovnostranný se stranami, jejichž délka je ve vhodně zvolené délkové jednotce přirozené číslo. Narýsovat takový trojúhelník je pro něho hračka.

Rovnostranný trojúhelník je v podstatě „dokonalý“ útvar oplývající mnoha pozoruhodnými vlastnostmi. Je to nejjednodušší pravidelný mnohoúhelník, ve kterém jsou všechny strany stejně dlouhé, navíc všechny vnitřní úhly mají velikost 60° (na takový úhel netřeba hledat úhloměr, vystačíme s pravítkem a kružítkem). Rovnostranný trojúhelník má celkem 3 osy souměrnosti (procházejí vrcholy a středy protilehlých stran) a jeho těžiště, průsečík výšek, střed kružnice opsané i vepsané splývají do jediného bodu. Rovnostranný trojúhelník je také jedním ze tří pravidelných útvarů (spolu se čtvercem a pravidelným šestiúhelníkem), kterými lze beze zbytku vyplnit plochu (umožnuje tzv. teselaci – vyplnění roviny pomocí bez překrývání a bez mezer.).

S rovnostrannými trojúhelníky se můžeme potkat doslova na každém kroku. Například výstražné dopravní značky mají tento tvar, protože je lidským okem velmi rychle rozpoznatelný. Nejznámějším příkladem je patrně značka „Dej přednost v jízdě“.



Díky své stabilitě je rovnostranný trojúhelník používán pro konstrukci příhradových nosníků mostů či jeřábů. Atomy některých prvků se uspořádávají do mřížek tvořených rovnostrannými trojúhelníky, je to pro ně zkrátka energeticky nejúspornější varianta.

Z šesti stejných rovnostranných trojúhelníků složíme pravidelný šestiúhelník, povrch pravidelného čtyřstěnu tvoří čtyři shodné rovnostranné trojúhelníky…

Rovnostranné trojúhelníky ale umí ukázat i méně přívětivou tvář. Problémy nastanou, vstoupí-li do geometrického světa žáka Pythagorova věta. Určit přesně výšku, poloměr vepsané či opsané kružnice a koneckonců i obsah takového trojúhelníku vyžaduje opustit množinu racionálních čísel a vydat se do nepřívětivého až děsivého „iracionálna“.

Výška rovnostranného trojúhelníka $v_a = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ a jeho obsah $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ prostě mnohým žákům připadají jako přízraky z jiného světa…

V následujícím textu se budeme zabývat opravdu „uživatelsky přívětivými trojúhelníky“, tedy takovými, u nichž nejen strany, ale i obvod a obsah lze vyjádřit pomocí přirozených čísel. Čekají nás trojúhelníky, pro něž se vžilo označení *pythagorejské* a *heronovské*.

Pythagorejské trojúhelníky

Pythagorejský trojúhelník je pravoúhlý trojúhelník, jehož délky stran jsou vyjádřeny přirozenými čísly.

Nejznámější pythagorejský trojúhelník má délky stran 3, 4, 5. Délky stran pythagorejského trojúhelníku se často označují jako *pythagorejská trojice* (x, y, z), kde z je délka přepony.

Pythagorejské trojúhelníky (x, y, z) nazýváme *primitivní*, jestliže čísla x, y a z jsou nesoudělná, neboli $\mathrm{D}(x, y, z) = 1$.

Generování pythagorejských trojúhelníků

Samotní Pythagorejci pro konstruování pythagorejských trojúhelníků využívali vztahů

$a = 2p + 1$; $b = 2p^2 + 2p$; $c = 2p^2 + 2p + 1$ (pro všechna přirozená čísla p).

Ukažme, že takto vytvořený trojúhelník je pravoúhlý:

$$a^2 + b^2 = (2p + 1)^2 + (2p^2 + 2p)^2 = 4p^2 + 4p + 1 + 4p^4 + 8p^3 + 4p^2 =$$

$$= 4p^4 + 8p^3 + 8p^2 + 4p + 1$$

$$c^2 = (2p^2 + 2p + 1)^2 = 4p^4 + 4p^3 + 2p^2 + 4p^3 + 4p^2 + 2p + 2p^2 + 2p + 1 =$$

$$= 4p^4 + 8p^3 + 8p^2 + 4p + 1 = a^2 + b^2.$$

Tento způsob generuje, jak je z uvedených vztahů patrné, pouze trojúhelníky s přeponou o jedna delší než je délka větší z odvěsen, například trojúhelníky (3, 4, 5) nebo (5, 12, 13). Tyto a další trojúhelníky lze snadno získat pomocí tabulkového procesoru. Prvních dvacet takových trojúhelníků zachycuje následující tabulka.

p	$2p + 1$	$2p^2 + 2p$	$2p^2 + 2p + 1$
1	3	4	5
2	5	12	13
3	7	24	25
4	9	40	41
5	11	60	61
6	13	84	85
7	15	112	113
8	17	144	145
9	19	180	181
10	21	220	221
11	23	264	265
12	25	312	313
13	27	364	365
14	29	420	421
15	31	480	481
16	33	544	545
17	35	612	613
18	37	684	685
19	39	760	761
20	41	840	841

V Mezopotámii se ke generování pravoúhlých trojúhelníků využívaly vzorce:

$a = m^2 - 1$; $b = 2m$; $c = m^2 + 1$ (pro všechna přirozená čísla $m > 1$)

Zde je důkaz funkčnosti vzorců ještě kratší:

$$a^2 + b^2 = (m^2 - 1)^2 + (2m)^2 = m^4 - 2m^2 + 1 + 4m^2 = m^4 + 2m^2 + 1 = (m^2 + 1)^2 = c^2$$

Také v tomto případě však neobdržíme všechny primitivní pythagorejské trojúhelníky, chybí třeba hned ten druhý (5, 12, 13). Vidíme, že kromě prvního trojúhelníku (3, 4, 5) je délka nejkratší strany vyjádřena vždy sudým číslem a přepona je o dvě delší, než je délka větší odvěsny. Navíc každý druhý trojúhelník (pro m liché) má všechny strany sudé (soudělné), a nejedná se tedy o primitivní pythagorejský trojúhelník. Ten však lze snadno odvodit zkrácením stran na polovinu. Tak získáme postupně všechny trojúhelníky vytvořené podle postupu Pythagorejců.

Trojúhelníky pro $m \leq 20$ uvádíme v tabulce

m	$2m$	$m^2 - 1$	$m^2 + 1$
2	4	3	5
3	6	8	10
4	8	15	17
5	10	24	26
6	12	35	37
7	14	48	50
8	16	63	65
9	18	80	82
10	20	99	101
11	22	120	122
12	24	143	145
13	26	168	170
14	28	195	197
15	30	224	226
16	32	255	257
17	34	288	290
18	36	323	325
19	38	360	362
20	40	399	401

Ani kombinací obou výše uvedených postupů se nám ale nepodaří najít všechny primitivní pythagorejské trojúhelníky, nezískáme tak například trojúhelníky (33, 56, 65), (39, 80, 89), (65, 72, 97) a další, u kterých je přepona o více než dvě delší než větší odvěsna.

Získat všechny primitivní pythagorejské trojúhelníky není přitom vůbec složité. Stačí využít vztahy $a = u^2 - v^2$; $b = 2uv$; $c = u^2 + v^2$, kde u a v jsou všechna přirozená čísla, $u > v$. Vedle primitivních pythagorejských trojúhelníků tak dostaneme i mnohé (všechny?) další.

Platí věta:
Každý primitivní pythagorejský trojúhelník (x, y, z), kde y je sudé číslo, se dá zapsat ve tvaru $x = m^2 - n^2$; $y = 2mn$; $z = m^2 + n^2$, kde m a n jsou nesoudělná přirozená čísla, $m > n$.

Důkaz provedeme v další části textu.

Vlastnosti pythagorejských trojúhelníků

Nechť (x, y, z) je primitivní pythagorejský trojúhelník. Pak platí:

- délky odvěsen mají odlišnou paritu;
- délka jedné odvěsny je dělitelná čtyřmi;
- délka alespoň jedné odvěsny je dělitelná třemi;
- délka alespoň jedné strany je dělitelná pěti.

Je složité uvedené vlastnosti dokázat? Podívejme se, že nikoli. Proč musí být v primitivním pythagorejském trojúhelníku jedna odvěsna lichá a druhá sudá?

Je zřejmé, že obě odvěsny nemohou být sudé, pak by totiž sudá byla i přepona a trojúhelník by nebyl primitivní. Ukažme, že obě odvěsny nemohou být současně lichá čísla.

Předpokládejme, že jsou a můžeme je vyjádřit ve tvaru $x = 2k + 1$, $y = 2l + 1$, kde $k, l \in \mathbb{N}$. Dostáváme

$$x^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1$$

$$y^2 = (2l + 1)^2 = 4l^2 + 4l + 1 = 4l(l + 1) + 1$$

Protože jedno z čísel k a $k + 1$ musí být sudé, dává číslo x^2 při dělení osmi zbytek 1 a stejně tomu je i u čísla y^2. Můžeme tedy psát $x^2 = 8p + 1, y^2 = 8q + 1$, kde p, q jsou přirozená čísla. Mělo by tedy platit: $x^2 + y^2 = 8p + 8q + 2 = 8(p + q) + 2 = z^2$, což je číslo sudé o dvě větší než násobek osmi. Protože ale každá druhá mocnina je buď číslo liché, nebo je násobkem čtyř, dostáváme spor. Předpoklad, že obě odvěsny jsou liché, tedy neplatí.

Nyní dokažme větu o konstruování pythagorejských trojúhelníků.

Každý primitivní pythagorejský trojúhelník (x, y, z), kde y je sudé číslo, se dá zapsat ve tvaru $x = m^2 - n^2; y = 2mn; z = m^2 + n^2$, kde m a n jsou nesoudělná přirozená čísla, $m > n$.

Pro primitivní pythagorejský trojúhelník (x, y, z), kde y je sudé číslo, platí, že x i z musí být díky nesoudělnosti s y čísla lichá.

S využitím vzorce pro rozdíl druhých mocnin vyjádříme $y^2 = z^2 - x^2 = (z + x)(z - x)$, kde $(z + x)$ i $(z - x)$ jsou čísla sudá (liché plus liché i liché minus liché dávají sudé číslo).

Můžeme tedy psát:

$$z + x = 2p, z - x = 2q, \text{ kde } p \text{ a } q \text{ jsou přirozená čísla taková, že } p > q.$$

Sečtením těchto rovnic dostaneme $z = p + q$, odečtením $x = p - q$.

Nyní ukážeme, že čísla p a q jsou nesoudělná. Pokud by totiž měla společného dělitele $d > 1$, byl číslem d dělitelný jejich součet i rozdíl a musela by obě dělit současně také x a z.

Protože ale $d|x$ a $d|z$, pak také $d|(z + x)$ a $d|(z - x)$ a tedy $d^2|y^2$. Čísla x, y, z by tak ale byla soudělná, což je ale spor s předpokladem, že pythagorejský trojúhelník (x, y, z) primitivní.

Číslo y bylo zvoleno jako sudé číslo, můžeme tedy psát $y = 2r$ a také $y^2 = 4r^2 = 2p \cdot 2q$.

Odtud dostaneme $r^2 = p \cdot q$ a protože čísla p a q jsou nesoudělná, musí být sama druhými mocninami. Existují tedy nesoudělná přirozená čísla m a n taková, že $m > n$ a platí:

$$p = m^2, q = n^2, r = mn$$

Po dosazení dostaneme: $x = p - q = m^2 - n^2, y = 2r = 2rm, z = p + q = m^2 + n^2$. QED

Poznámka: Větu nelze jednoduše obrátit. Pokud jsou čísla m a n obě lichá, dostáváme trojúhelník se sudými délkami stran, tedy pythagorejský trojúhelník, který není primitivní.

Věta:
Nechť (x, y, z) je primitivní pythagorejský trojúhelník. Pak je délka alespoň jedné odvěsny dělitelná čtyřmi.

Důkaz:

Vyjdeme z vyjádření stran primitivního pythagorejského trojúhelníku:
$x = m^2 - n^2$; $y = 2mn$; $z = m^2 + n^2$, kde m a n jsou nesoudělná přirozená čísla, $m > n$.

Protože m a n jsou nesoudělná čísla, nemohou být obě sudá. Nemohou být ani současně lichá, protože by pak x jako rozdíl dvou lichých čísel ($x = m^2 - n^2$) muselo být sudé, což není možné, protože odvěsny mají opačnou paritu a druhá odvěsna je podle předpokladů sudá ($y = 2mn$). Je tedy jedno z čísel m a n liché a druhé sudé. Z čehož ovšem plyne, že délka odvěsny $y = 2mn$ musí být násobkem čtyř. QED.

Věta:
Nechť (x, y, z) je pythagorejský trojúhelník. Pak je délka alespoň jedné odvěsny dělitelná třemi.

Důkaz:

Předpokládejme, že ani jedna z odvěsen x a y není dělitelná třemi. Pak lze psát:

$$x = 3k \pm 1, y = 3l \pm 1, \text{ pro nějaká přirozená čísla } k \text{ a } l.$$

Vyjádříme z^2 dostaneme:

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 + y^2 = (3k \pm 1)^2 + (3l \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 + 9l^2 \pm 6l + 1 = \\ &= 3(3k^2 \pm 2k + 3l^2 \pm 2l) + 2 \end{aligned}$$

Vidíme, že při dělení z^2 třemi vychází zbytek 2, což ale není možné. Pokud by z bylo dělitelné třemi, musel by vyjít zbytek 0, v případě, že z třemi dělitelné není, vyjde zbytek 1. Čímž se dostáváme do sporu s předpokladem, že ani jedna z odvěsen x a y není dělitelná třemi. QED.

Věta:
Nechť (x, y, z) je pythagorejský trojúhelník. Pak je délka alespoň jedné strany dělitelná pěti.

Důkaz:

Přirozené číslo n, které není dělitelné pěti lze vyjádřit buď ve tvaru $n = 5k \pm 1$, nebo ve tvaru $n = 5k \pm 2$, kde k je přirozené číslo. Pro druhou mocninu n máme dvě možnosti:

$$n^2 = (5k \pm 1)^2 = 25k^2 \pm 10k + 1 = 5(5k^2 \pm 2k) + 1,$$

$$n^2 = (5k \pm 2)^2 = 25k^2 \pm 20k + 4 = 5(5k^2 \pm 4k) + 4.$$

Vidíme, že druhá mocnina přirozeného čísla, které není dělitelné pěti, dává při dělení pěti dva možné zbytky: 1 nebo 4.

Uvažujme nyní trojici (x, y, z), ve které žádné číslo není dělitelné pěti. Varianty pro všechny možné výsledky z^2 vyjádříme pro přehlednost tabulkou:

x^2 mod 5	y^2 mod 5	$(x^2 + y^2)$ mod 5	Vyhovuje z^2 mod 5? Je to možné?
1	1	2	Zbytek 2 nemůže pro číslo z^2 nastat – spor.
1	4	0	Číslo z^2 je dělitelné pěti – spor.
4	1	0	Číslo z^2 je dělitelné pěti – spor.
4	4	3	Zbytek 3 nemůže pro číslo z^2 nastat – spor.

Vidíme, že v pythagorejském trojúhelníku tedy nemůže nastat situace, kdy žádná strana není dělitelná pěti. QED.

Důsledkem výše uvedených vět je například tvrzení, že obsah každého pythagorejského trojúhelníku je dělitelný šesti.

Další zajímavá fakta o pythagorejských trojúhelnících uvedeme bez důkazu:

- Existuje pouze konečný počet pythagorejských trojúhelníků, kde x je daná délka odvěsny.
- Délky obou odvěsen nemohou být současně druhými mocninami přirozených čísel.
- Délky jedné z odvěsen a délka přepony nemohou být současně druhými mocninami přirozených čísel.
- Neexistuje pythagorejský trojúhelník, který by měl za odvěsny přeponu a odvěsnu jiného pythagorejského trojúhelníku.

Následující tabulka obsahuje několik prvních pythagorejských trojúhelníků generovaných vzorci $a = m^2 - n^2$; $b = 2mn$; $c = m^2 + n^2$.

m	n	a	b	c	
2	1	3	4	5	Primitivní PT
3	1	8	6	10	
3	2	5	12	13	Primitivní PT
4	1	15	8	17	Primitivní PT
4	2	12	16	20	
4	3	7	24	25	Primitivní PT
5	1	24	10	26	
5	2	21	20	29	Primitivní PT
5	3	16	30	34	
5	4	9	40	41	Primitivní PT
6	1	35	12	37	Primitivní PT
6	2	32	24	40	
6	3	27	36	45	
6	4	20	48	52	
6	5	11	60	61	Primitivní PT
7	1	48	14	50	
7	2	45	28	53	Primitivní PT
7	3	40	42	58	
7	4	33	56	65	Primitivní PT
7	5	24	70	74	
7	6	13	84	85	Primitivní PT
8	1	63	16	65	Primitivní PT
8	2	60	32	68	
8	3	55	48	73	Primitivní PT
8	4	48	64	80	
8	5	39	80	89	Primitivní PT
8	6	28	96	100	
8	7	15	112	113	Primitivní PT

Poznámka:

Někteří vědci se domnívají, že uvedené vzorce znali již v Mezopotámii. Hliněná tabulka stará zhruba 3800 let označovaná jako Plimpton 322, obsahuje číselné údaje, které to naznačují.

https://isaw.nyu.edu/exhibitions/before-pythagoras/items/plimpton-322/

Připomeňme si nyní jednu ze zajímavých vlastností pravoúhlých trojúhelníků:

Věta:

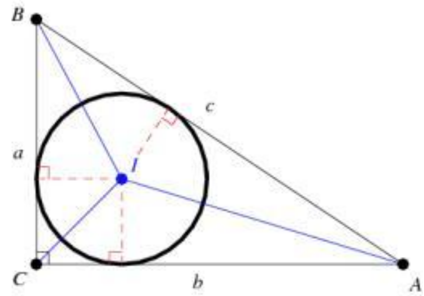
Pro každý pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami a, b a přeponou c je poloměr r_v kružnice tomuto trojúhelníku vepsané:

$$r_v = \frac{a + b - c}{2}.$$

Tento vzorec vychází ze známého faktu, že tečny ke kružnici sestrojené z vnějšího bodu (v tomto případě z jednotlivých vrcholů trojúhelníku) jsou stejně dlouhé. Zdůvodnění není vůbec složité.

Když do pravoúhlého trojúhelníku vepíšeme kružnici, v rohu u pravého úhlu vznikne malý čtverec o straně r_v. Strany trojúhelníku pak můžeme rozdělit na úseky pomocí bodů dotyku:

Odvěsna a se skládá z úseků r_v a $(a - r_v)$, odvěsna b z úseků r_v a $(b - r_v)$, přepona c je potom součtem částí $(a - r_v) + (b - r_v)$.



Můžeme tedy psát: $c = (a - r_v) + (b - r_v)$

Pokud tuto rovnici upravíme, dostaneme

$$c = a + b - 2r_v$$

$$r_v = \frac{a + b - c}{2}$$

Odtud také vyplývá následující tvrzení.

Věta:

V každém pythagorejském trojúhelníku je poloměr r_v vepsané kružnice roven přirozenému číslu.

Příklady:

Trojúhelník (3, 4, 5):

$$r_v = \frac{3 + 4 - 5}{2} = 1$$

Trojúhelník (5, 12, 13):

$$r_v = \frac{5 + 12 - 13}{2} = 2$$

Trojúhelník (8, 15, 17):

$$r_v = \frac{8 + 15 - 17}{2} = 3$$

Poznámka: Pokud známe pouze poloměr kružnice vepsané (a je to právě nějaké přirozené číslo), můžeme získat primitivní pythagorejský trojúhelník s tímto poloměrem pomocí vztahů, které již známe:

Odvěsna $a = 2r_v + 1$;

odvěsna $b = 2{r_v}^2 + 2r_v$;

Přepona $c = 2{r_v}^2 + 2r_v + 1$.

Pokud známe obsah trojúhelníku a jeho obvod (což v případě daného pythagorejského trojúhelníku samozřejmě známe), je možné z těchto údajů přímo vypočítat poloměr vepsané kružnice. V kapitole věnované heronovským trojúhelníkům se k tomu ještě vrátíme.

Pythagorejské trojúhelníky generované Fibonacciho posloupností

Ke generování pythagorejských trojúhelníků můžeme také využít čtyři po sobě jdoucí členy Fibonacciho posloupnosti f_n, f_{n+1}, f_{n+2} a f_{n+3}, která byla vytvořena na základě dvou zcela libovolných přirozených členů f_1 a f_2.

Odvěsny vypočteme pomocí vztahů: $a = 2 \cdot f_{n+1} \cdot f_{n+2}, \quad b = f_n \cdot f_{n+3}$.

Přeponu pak lze získat více způsoby:

buď využijeme vztah $c = f_{n+2} \cdot f_{n+3} - f_n \cdot f_{n+1}$, vztah $c = {f_{n+1}}^2 + {f_{n+2}}^2$, nebo další alternativní vzorce $c = {f_n}^2 + 2 \cdot f_{n+1} \cdot f_{n+2}, = {f_{n+3}}^2 - 2 \cdot f_{n+1} \cdot f_{n+2}$.

Že uvedené postupy platí, bychom plně dokázali matematickou indukcí, zde se omezíme na ověření platnosti pro první čtyři členy Fibonacciho posloupnosti. Nejprve ukážeme, že

$$c = {f_2}^2 + {f_3}^2 = f_3 \cdot f_4 - f_1 \cdot f_2.$$

Protože $f_3 = f_1 + f_2$ a $f_4 = f_2 + f_3 = f_2 + f_1 + f_2 = f_1 + 2f_2$ můžeme psát:

$c = {f_2}^2 + {f_3}^2 = {f_2}^2 + (f_1 + f_2)^2 = {f_2}^2 + {f_1}^2 + 2f_1f_2 + {f_2}^2 = {f_1}^2 + 2f_1f_2 + 2{f_2}^2$, ale také

$f_3f_4 - f_1f_2 = (f_1 + f_2)(f_1 + 2f_2) - f_1f_2 = {f_1}^2 + 2f_1f_2 + f_1f_2 + {f_2}^2 - f_1f_2 = {f_1}^2 + 2f_1f_2 + 2{f_2}^2$.

Nyní ukážeme, že $a^2 + b^2 = (2f_2f_3)^2 + (f_1f_4)^2 = \left({f_1}^2 + 2f_1f_2 + 2{f_2}^2\right)^2 = c^2$.

$a^2 + b^2 = (2f_2f_3)^2 + (f_1f_4)^2 = 4{f_2}^2(f_1 + f_2)^2 + {f_1}^2(f_1 + 2f_2)^2 =$

$= 4{f_1}^2{f_2}^2 + 8f_1{f_2}^3 + 4{f_2}^4 + {f_1}^4 + 4{f_1}^3f_2 + 4{f_1}^2{f_2}^2 = {f_1}^4 + 4{f_1}^3f_2 + 8{f_1}^2{f_2}^2 + 8f_1{f_2}^3 + 4{f_2}^4$

$c^2 = \left({f_1}^2 + 2f_1f_2 + 2{f_2}^2\right)^2 = {f_1}^4 + 4{f_1}^3f_2 + 8{f_1}^2{f_2}^2 + 8f_1{f_2}^3 + 4{f_2}^4$.

Věta:

Pro trojúhelník vygenerovaný pomocí členů f_n, f_{n+1}, f_{n+2} a f_{n+3} Fibonacciho posloupnosti tak, že $a = 2f_{n+1}f_{n+2}$; $b = f_nf_{n+3}$; $c = f_{n+2}f_{n+3} - f_nf_{n+1}$ platí:

a) $S = f_n \cdot f_{n+1} \cdot f_{n+2} \cdot f_{n+3}$;

b) $o = 2 \cdot f_{n+2} \cdot f_{n+3}$;

c) $r_v = f_n \cdot f_{n+1}$.

Důkaz:

a) $S = \frac{1}{2} a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot f_{n+1} \cdot f_{n+2} \cdot f_n \cdot f_{n+3} = f_nf_{n+1}f_{n+2}f_{n+3}$.

b) $o = a + b + c = 2f_{n+1}f_{n+2} + f_nf_{n+3} + f_{n+2}f_{n+3} - f_nf_{n+1} =$

$= 2f_{n+1}f_{n+2} + (f_{n+2} - f_{n+1})f_{n+3} + f_{n+2}f_{n+3} - f_nf_{n+1} =$

$= 2f_{n+1}f_{n+2} + f_{n+2}f_{n+3} - f_{n+1}f_{n+3} + f_{n+2}f_{n+3} - f_nf_{n+1} =$

$= 2f_{n+2}f_{n+3} + 2f_{n+1}f_{n+2} - f_{n+1}f_{n+3} - f_nf_{n+1} =$

$= 2f_{n+2}f_{n+3} + 2f_{n+1}(f_n + f_{n+1}) - f_{n+1}(f_n + 2f_{n+1}) - f_nf_{n+1} =$

$= 2f_{n+2}f_{n+3} + 2f_{n+1}f_n + 2f_{n+1}f_{n+1} - 2f_{n+1}f_{n+1} - f_{n+1}f_n - f_nf_{n+1} = 2f_{n+2}f_{n+3}$

c) $r_v = \frac{1}{2}(a+b-c) = \frac{1}{2}[2f_{n+1}f_{n+2} + f_n f_{n+3} - (f_{n+2}f_{n+3} - f_n f_{n+1})] =$

$$= \frac{1}{2}(2f_{n+1}f_{n+2} + f_n f_{n+3} - f_{n+2}f_{n+3} + f_n f_{n+1}) =$$

$$= \frac{1}{2}[2f_{n+1}(f_n + f_{n+1}) + f_n(f_n + 2f_{n+1}) - (f_n + f_{n+1})(f_n + 2f_{n+1}) + f_n f_{n+1}] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[2f_{n+1}f_n + 2{f_{n+1}}^2 + {f_n}^2 + 2f_n f_{n+1} - {f_n}^2 - 2f_n f_{n+1} - f_n f_{n+1} - 2{f_{n+1}}^2 + f_n f_{n+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2f_n f_{n+1} = f_n f_{n+1}.$$

Při generování pythagorejských trojúhelníků je samozřejmě nejjednodušší využít první čtyři členy posloupnosti – pro první dva členy zvolit libovolná přirozená čísla (nemusí být různá) a dva zbývající poté dopočítat.

V tabulkovém procesoru lze velmi jednoduše generovat členy Fibonacciho posloupnosti i z ní odvozené pythagorejské trojúhelníky. Také můžeme sledovat, jaké trojúhelníky obdržíme pro různě zvolené čtveřice členů Fibonacciho posloupnosti.

V následující tabulce vidíme dvě ukázky Fibonacciho posloupnosti a pythagorejských trojúhelníků generovaných čtveřicí jejích členů (počínaje $f_n = 1, 2, 3, \ldots, 7$). Zároveň vidíme, které z pythagorejských trojúhelníků jsou primitivní a které nikoli.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

od *n* =	1	2	3	4	5	6	7
a =	4	12	30	80	208	546	1428
b =	3	5	16	39	105	272	715
c =	5	13	34	89	233	610	1597
	primitivní	primitivní		primitivní	primitivní		primitivní

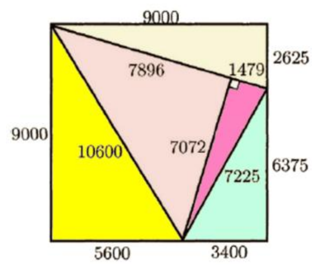
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_n	2	7	9	16	25	41	66	107	173	280

od *n* =	1	2	3	4	5	6	7
a =	126	288	800	2050	5412	14124	37022
b =	32	175	369	1056	2675	7093	18480
c =	130	337	881	2306	6037	15805	41378
		primitivní	primitivní		primitivní	primitivní	

Z tabulky je mimo jiné také dobře vidět, že po dvou primitivních trojúhelnících přichází vždy trojúhelník, který je možné redukovat. Pokud se nad tím zamyslíme, snadno nahlédneme, že po dvou lichých členech Fibonacciho posloupnosti následuje člen sudý, následovaný opět dvěma lichými. Je-li f_n číslo sudé, pak musí být sudé i obě odvěsny $a = 2f_{n+1}f_{n+2}$, $b = f_n f_{n+3}$ a díky tomu i přepona. Zadáme-li jako první dva členy Fibonacciho posloupnosti čísla sudá, pak pochopitelně žádné primitivní pythagorejské trojúhelníky neobdržíme.

Kuriozita na závěr

Víte, že je možné poskládat čtverec z pěti pythagorejských trojúhelníků? A že veškeré pokusy složit čtverec z méně než pěti pythagorejských trojúhelníků skončily nezdarem?



Heronovské trojúhelníky

Heron Alexandrijský (zvaný Méchanikos) byl starověký matematik a vynálezce. Žil v letech 10–70 n. l. v Alexandrii, kde působil v proslulém Múseiu, což byla po několik staletí nejvýznamnější starověká badatelská instituce. Součástí tohoto centra tehdejší vědy byla také proslulá alexandrijská knihovna.

Heron se zabýval problémy z matematiky, mechaniky, optiky a dalších oblastí fyziky. Jedním z plodů jeho práce je proslulý *Heronův vzorec*:

Obsah obecného trojúhelníku ABC se stranami délek a, b, c lze určit pomocí vzorce

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ kde } s = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Vzorec Heron publikoval a také (poměrně složitě) dokázal v knize *Métrika*. O šest století později zformuloval indický matematik Brahmagupta podobný vzorec pro výpočet obsahu tětivových čtyřúhelníků (čtyřúhelníky, kterým lze opsat kružnici), Heronův vzorec je jeho limitním případem pro délku jedné ze stran čtyřúhelníku zkracující se k nule.

Heronovské trojúhelníky nazýváme trojúhelníky, jejichž strany mají celočíselné délky a zároveň celočíselný obsah.

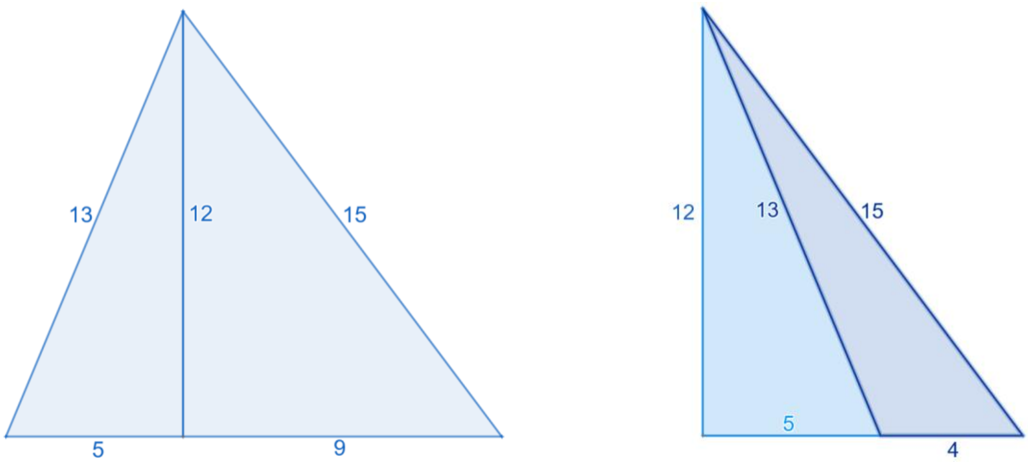
Heronovský trojúhelník s délkami stran x, y a z budeme značit $[x;\ y;\ z]$.

Definice:

Nechť k je přirozené číslo, $[kx;\ ky;\ kz]$ a $[x;\ y;\ z]$ jsou heronovské trojúhelníky. Trojúhelník $[x;\ y;\ z]$ se nazývá *redukovaný heronovský trojúhelník*.

Heronovské trojúhelníky $[x;\ y;\ z]$ nazýváme *primitivní*, jestliže čísla x, y a z jsou nesoudělná, neboli $\mathrm{D}(x, y, z) = 1$.

Mezi heronovské trojúhelníky patří samozřejmě všechny pythagorejské trojúhelníky. Heronovské trojúhelníky však mohou být nejen pravoúhlé, ale také ostroúhlé nebo tupoúhlé. Pokud najdeme dva pythagorejské trojúhelníky se stejnou odvěsnou, můžeme je snadno vytvořit. Například z trojúhelníků (9, 12, 15) a (5, 12, 13) lze vytvořit ostroúhlý heronovský trojúhelník (13, 14, 15) a tupoúhlý heronovský trojúhelník (4, 13, 15).



Obsah ostroúhlého trojúhelníku je $\frac{5\cdot 12}{2} + \frac{9\cdot 12}{2} = 84$ a tupoúhlého $\frac{9\cdot 12}{2} - \frac{5\cdot 12}{2} = 24$.

Věta:

Obvod každého heronovského trojúhelníku je sudé číslo.

Důkaz:

Dokažme větu sporem. Předpokládejme, že obvod nějakého heronovského trojúhelníku je liché číslo, tedy buď jsou všechny tři jeho strany liché, nebo jsou dvě sudé a jedna lichá (tu můžeme bez újmy na obecnosti označit a.

V obou případech by pak čísla $(a + b + c)$, $(b + c - a)$, $(a + c - b)$ a $(a + b - c)$ byla také lichá. Ve výrazu pro obsah takového trojúhelníku by pak pod odmocninou

$$S = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}}$$

ale nevycházelo celé číslo a ani obsah by pak nemohl být celé číslo, trojúhelník by tedy nemohl být heronovský, což je spor. Obvod heronovského trojúhelníku je tedy vždy sudý.

Důsledek věty:

Každý primitivní heronovský trojúhelník má dvě strany liché a jednu sudou.

Věta:

Rovnoramenný heronovský trojúhelník, ve kterém $a = b$, má třetí stranu c sudé délky a výška na tuto stranu v_c je přirozené číslo.

Důkaz:

Jestliže $a = b$, potom $s = \frac{1}{2}(a + a + c) = a + \frac{c}{2}$. Protože obvod každého heronovského trojúhelníku je sudé číslo, polovina obvodu musí být číslo přirozené. Proto i $\frac{c}{2}$ musí být přirozené číslo a číslo c sudé.

Dále dokážeme, že výška v_c je přirozené číslo. Rozepišme sudé číslo c jako $c = 2c_p$

Obsah trojúhelníku $S = \frac{1}{2} c \cdot v_c$, tedy $v_c = \frac{2S}{c} = \frac{2S}{2c_p} = \frac{S}{c_p}$, kde obsah S i c_p jsou přirozená čísla.

Pro výšku rovnoramenného trojúhelníku z Pýthagorovy věty plyne $v_c = \sqrt{a^2 - {c_p}^2}$, přičemž platí, že v_c je racionální číslo (řešíme heronovský trojúhelník).

Nyní spojíme obě vyjádření v_c a poté obě strany rovnice umocníme:

$$v_c = \sqrt{a^2 - {c_p}^2} = \frac{S}{c_p}$$

$${v_c}^2 = a^2 - {c_p}^2 = \frac{S^2}{{c_p}^2}$$

Protože výraz $a^2 - {c_p}^2$je rozdílem dvou přirozených čísel, je také $\frac{S^2}{{c_p}^2}$ číslo přirozené. To ale znamená, že číslo ${c_p}^2$ dělí beze zbytku číslo S^2, tedy ${c_p}^2 | S^2$. To je ale možné pouze, když $c_p | S$.

Odtud vidíme, že výška v_c je přirozené číslo. QED.

Věta (bez důkazu):

Trojúhelník je heronovský tehdy a jen tehdy, když je kombinací dvou pythagorejských trojúhelníků podle společné odvěsny, nebo je redukovaným heronovským trojúhelníkem z kombinace pythagorejských trojúhelníků.

Generování heronovských trojúhelníků

Pro generování heronovských trojúhelníků existují různé metody. Jednou z možností je využít větu nazývanou *Carmichaelova poučka*:

Trojúhelník s celočíselnými stranami délek a, b, c je heronovský tehdy, jsou-li délky stran vyjádřeny vztahy

$$a = \frac{(m-n)(k^2+mn)}{d},$$

$$b = \frac{m(k^2+n^2)}{d},$$

$$c = \frac{n(k^2+m^2)}{d},$$

kde $d, k, m, n \in \mathbb{N}, m > n$ a d je libovolný dělitel všech čitatelů.

Tato metoda vygeneruje trojúhelníky nejen heronovské, ale také pýthagorejské. Pouze část z nich je přímo primitivních, mnohé je třeba na primitivní ještě redukovat.

Z následujících tabulek, ve kterých jsme využili největšího společného dělitele d čitatelů, je vidět, že přehled generovaných trojúhelníků je značně chaotický.

Heronovské trojúhelníky pro $k = 1$:

k	m	n	$(m-n)(k^2+mn)$	$m(k^2+n^2)$	$n(k^2+m^2)$	NSD	a	b	c	S	p/h
1	2	1	3	4	5	1	3	4	5	6	pyth
1	3	1	8	6	10	2	4	3	5	6	pyth
1	3	2	7	15	20	1	7	15	20	42	her
1	4	1	15	8	17	1	15	8	17	60	pyth
1	4	2	18	20	34	2	9	10	17	36	her
1	4	3	13	40	51	1	13	40	51	156	her
1	5	1	24	10	26	2	12	5	13	30	pyth
1	5	2	33	25	52	1	33	25	52	330	her
1	5	3	32	50	78	2	16	25	39	120	her
1	5	4	21	85	104	1	21	85	104	420	her
1	6	1	35	12	37	1	35	12	37	210	pyth
1	6	2	52	30	74	2	26	15	37	156	her
1	6	3	57	60	111	3	19	20	37	114	her
1	6	4	50	102	148	2	25	51	74	300	her
1	6	5	31	156	185	1	31	156	185	930	her

Heronovské trojúhelníky pro $k = 2$:

k	m	n	$(m-n)(k^2+mn)$	$m(k^2+n^2)$	$n(k^2+m^2)$	NSD	a	b	c	S	p/h
2	2	1	6	10	8	2	3	5	4	6	pyth
2	3	1	14	15	13	1	14	15	13	84	her
2	3	2	10	24	26	2	5	12	13	30	pyth
2	4	1	24	20	20	4	6	5	5	12	her
2	4	2	24	32	40	8	3	4	5	6	pyth
2	4	3	16	52	60	4	4	13	15	24	her
2	5	1	36	25	29	1	36	25	29	360	her
2	5	2	42	40	58	2	21	20	29	210	pyth
2	5	3	38	65	87	1	38	65	87	1140	her
2	5	4	24	100	116	4	6	25	29	60	her
2	6	1	50	30	40	10	5	3	4	6	pyth
2	6	2	64	48	80	16	4	3	5	6	pyth
2	6	3	66	78	120	6	11	13	20	66	her
2	6	4	56	120	160	8	7	15	20	42	her
2	6	5	34	174	200	2	17	87	100	510	her

Heronovské trojúhelníky pro $k = 3$:

k	m	n	$(m-n)(k^2+mn)$	$m(k^2+n^2)$	$n(k^2+m^2)$	NSD	a	b	c	S	p/h
3	2	1	11	20	13	1	11	20	13	66	her
3	3	1	24	30	18	6	4	5	3	6	pyth
3	3	2	15	39	36	3	5	13	12	30	pyth
3	4	1	39	40	25	1	39	40	25	468	her
3	4	2	34	52	50	2	17	26	25	204	her
3	4	3	21	72	75	3	7	24	25	84	pyth
3	5	1	56	50	34	2	28	25	17	210	her
3	5	2	57	65	68	1	57	65	68	1710	her
3	5	3	48	90	102	6	8	15	17	60	pyth
3	5	4	29	125	136	1	29	125	136	1740	her
3	6	1	75	60	45	15	5	4	3	6	pyth
3	6	2	84	78	90	6	14	13	15	84	her
3	6	3	81	108	135	27	3	4	5	6	pyth
3	6	4	66	150	180	6	11	25	30	132	her
3	6	5	39	204	225	3	13	68	75	390	her

Heronovské trojúhelníky pro $k = 4$:

k	m	n	$(m-n)(k^2+mn)$	$m(k^2+n^2)$	$n(k^2+m^2)$	NSD	a	b	c	S	p/h
4	2	1	18	34	20	2	9	17	10	36	her
4	3	1	38	51	25	1	38	51	25	456	her
4	3	2	22	60	50	2	11	30	25	132	her
4	4	1	60	68	32	4	15	17	8	60	pyth
4	4	2	48	80	64	16	3	5	4	6	pyth
4	4	3	28	100	96	4	7	25	24	84	pyth
4	5	1	84	85	41	1	84	85	41	1680	her
4	5	2	78	100	82	2	39	50	41	780	her
4	5	3	62	125	123	1	62	125	123	3720	her
4	5	4	36	160	164	4	9	40	41	180	pyth
4	6	1	110	102	52	2	55	51	26	660	her
4	6	2	112	120	104	8	14	15	13	84	her
4	6	3	102	150	156	6	17	25	26	204	her
4	6	4	80	192	208	16	5	12	13	30	pyth
4	6	5	46	246	260	2	23	123	130	1380	her

Heronovské trojúhelníky pro $k = 5$:

k	m	n	$(m-n)(k^2+mn)$	$m(k^2+n^2)$	$n(k^2+m^2)$	NSD	a	b	c	S	p/h
5	2	1	27	52	29	1	27	52	29	270	her
5	3	1	56	78	34	2	28	39	17	210	her
5	3	2	31	87	68	1	31	87	68	930	her
5	4	1	87	104	41	1	87	104	41	1740	her
5	4	2	66	116	82	2	33	58	41	660	her
5	4	3	37	136	123	1	37	136	123	2220	her
5	5	1	120	130	50	10	12	13	5	30	pyth
5	5	2	105	145	100	5	21	29	20	210	pyth
5	5	3	80	170	150	10	8	17	15	60	pyth
5	5	4	45	205	200	5	9	41	40	180	pyth
5	6	1	155	156	61	1	155	156	61	4650	her
5	6	2	148	174	122	2	74	87	61	2220	her
5	6	3	129	204	183	3	43	68	61	1290	her
5	6	4	98	246	244	2	49	123	122	2940	her
5	6	5	55	300	305	5	11	60	61	330	pyth

A tak bychom mohli pokračovat dál…

Speciální typy heronovských trojúhelníků

Některé heronovské trojúhelníky se vyznačují neobvyklými vlastnostmi a my se na dva takové druhy podíváme podrobněji.

Konsekutivní heronovské trojúhelníky

Zvláštním typem heronovských trojúhelníků jsou takové, jejichž délky stran jsou tři po sobě jdoucí přirozená čísla. Česky se zpravidla označují jako *konsekutivní heronovské trojúhelníky*, ve světě se vedle pojmenování *consecutive triangles* někdy používá termín *super heronian triangles*.

Okamžitě se nám vybaví trojúhelníky (3, 4, 5) a (13, 14, 15), ale zákonitě se na mysl vkrade otázka: Existují ještě nějaké další a jak je případně zkonstruovat?

Nejprve si odvodíme vzorec pro obsah konsekutivního heronovského trojúhelníku.

Protože v heronovském trojúhelníku musí být dvě strany liché a jedna sudá, můžeme psát:

$$a = 2k - 1, b = 2k, c = 2k + 1, \text{ pro nějaké přirozené číslo } k.$$

Poloviční obvod trojúhelníku $s = 3k$ je tedy číslo přirozené. Dosazením do Heronova vzorce pro obsah dostaneme:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{3k(3k-2k+1)(3k-2k)(3k-2k-1)} =$$

$$= \sqrt{3k(k+1)k(k-1)} = k\sqrt{3(k^2-1)}.$$

Nyní budeme hledat hodnoty k, pro které je výraz $\sqrt{3(k^2-1)}$ přirozené číslo.

Výraz pod odmocninou označme: $3(k^2-1) = y^2$.

Zřejmě $3|y^2$ a tedy také $3|y$. Označme tedy $y = 3u$, kde $u \in \mathbb{N}$

$$3(k^2-1) = y^2$$

$$3(k^2-1) = 9u^2$$

$$k^2 - 1 = 3u^2$$

$$k^2 - 3u^2 = 1$$

Dospěli jsme k speciálnímu tvaru tzv. Pellovy rovnice, jejíž řešení je složitější a v tomto textu ho přeskočíme. Podstatné je, že naší rovnici vyhovují hodnoty

$$k_1 = 2, u_1 = 1$$

a další řešení získáme pomocí rekurentního vyjádření pro $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$k_{n+1} = 2k_n + 3u_n,$$

$$u_{n+1} = k_n + 2u_n.$$

Určeme tedy několik prvních hodnot čísla k_n (a samozřejmě také potřebných u_n):

$$k_2 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7, u_2 = 2 + 2 \cdot 1 = 4$$

$$k_3 = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 4 = 26, u_3 = 7 + 2 \cdot 4 = 15$$

$$k_4 = 2 \cdot 26 + 3 \cdot 15 = 97, u_4 = 26 + 2 \cdot 15 = 56$$

$$k_5 = 2 \cdot 97 + 3 \cdot 56 = 407, u_5 = 97 + 2 \cdot 56 = 235$$

Další výpočty ale již raději svěříme tabulkovému procesoru…

Konsekutivní heronovské trojúhelníky (prvních dvacet):

n	k_n	u_n	a	b	c	obvod	obsah
1	2	1	3	4	5	12	6
2	7	4	13	14	15	42	84
3	26	15	51	52	53	156	1170
4	97	56	193	194	195	582	16296
5	362	209	723	724	725	2172	226974
6	1351	780	2701	2702	2703	8106	3161340
7	5042	2911	10083	10084	10085	30252	44031786
8	18817	10864	37633	37634	37635	112902	613283664
9	70226	40545	140451	140452	140453	421356	8541939510
10	262087	151316	524173	524174	524175	1572522	1,18974E+11
11	978122	564719	1956243	1956244	1956245	5868732	1,65709E+12
12	3650401	2107560	7300801	7300802	7300803	21902406	2,30803E+13
13	13623482	7865521	27246963	27246964	27246965	81740892	3,21467E+14
14	50843527	29354524	101687053	101687054	101687055	305061162	4,47746E+15
15	189750626	109552575	379501251	379501252	379501253	1138503756	6,2363E+16
16	708158977	408855776	1416317953	1416317954	1416317955	4248953862	8,68605E+17
17	2642885282	1525870529	5285770563	5285770564	5285770565	15857311692	1,20981E+19
18	9863382151	5694626340	19726764301	19726764302	19726764303	59180292906	1,68505E+20
19	36810643322	21252634831	73621286643	73621286644	73621286645	2,20864E+11	2,34697E+21
20	1,37379E+11	79315912984	2,74758E+11	2,74758E+11	2,74758E+11	8,24275E+11	3,26891E+22

Z tabulky je patrné, jak rozměry konsekutivních heronovských trojúhelníků velice rychle rostou.

Téměř rovnostranné heronovské trojúhelníky

V úvodu našeho povídání o uživatelsky přívětivých trojúhelnících jsme se věnovali nejprve trojúhelníkům rovnostranným. Při generování konsekutivních heronovských trojúhelníků vidíme, jak se s rostoucími délkami stran čím dál tím víc blíží rovnostranným trojúhelníkům.

V tabulkovém procesoru můžeme snadno prozkoumat, jaké vnitřní úhly tyto konsekutivní heronovské trojúhelníky mají a jak se poměr dvojnásobku výšky na nejdelší stranu k délce této strany postupně (a docela rychle) přibližuje k odmocnině ze tří.

Zatímco pro určení výšky sestavíme vzorec snadno, pro určení velikostí úhlů je v tomto případě potřeba sáhnout po učivu středoškolském a využít *Kosinovou větu*.

Což může například vést ke vzorci: `=DEGREES(ARCCOS((F3*F3+G3*G3-E3*E3)/(2*F3*G3)))`.

n	a	b	c	α (°)	β (°)	γ (°)	$2 \cdot v_c / c$	$2 \cdot v_c / c - \sqrt{3}$
1	3	4	5	36,869898	53,130102	90,000000	0,960000	-0,772051
2	13	14	15	53,130102	59,489763	67,380135	1,493333	-0,238717
3	51	52	53	58,109208	59,963279	61,927513	1,666073	-0,065977
4	193	194	195	59,489763	59,997363	60,512874	1,714241	-0,017810
5	723	724	725	59,863024	59,999811	60,137166	1,727269	-0,004781
6	2701	2702	2703	59,963279	59,999986	60,036735	1,730769	-0,001282
7	10083	10084	10085	59,990159	59,999999	60,009842	1,731707	-0,000344
8	37633	37634	37635	59,997363	60,000000	60,002637	1,731959	-0,000092
9	140451	140452	140453	59,999293	60,000000	60,000707	1,732026	-0,000025
10	524173	524174	524175	59,999811	60,000000	60,000189	1,732044	-0,000007

Tak jsme se právě téměř dostali k trojúhelníkům rovnostranným, což ale, jak víme, není to pravé celočíselně ořechové. Zpět tedy k našim uživatelsky příjemnějším heronovským trojúhelníkům…

Perfektní heronovské trojúhelníky

Trojúhelník, jehož obvod i obsah jsou vyjádřeny stejným přirozeným číslem, nazýváme *perfektní heronovský trojúhelník*.

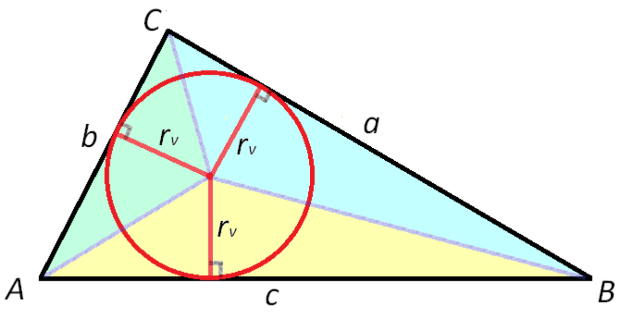
Tyto trojúhelníky mají některé zajímavé vlastnosti.

Věta:

Poloměr kružnice, která je vepsána perfektnímu heronovskému trojúhelníku, je vždy roven 2.

Důkaz:

Využijeme vyjádření obsahu trojúhelníku z jeho stran a poloměru vepsané kružnice. Každý trojúhelník lze totiž rozložit na tři menší, ve kterých výšku na stranu tvoří poloměr vepsané kružnice (viz obrázek).



Obsah takového trojúhelníku lze tedy psát:

$$S = \frac{a \cdot r_v}{2} + \frac{b \cdot r_v}{2} + \frac{c \cdot r_v}{2} = \frac{1}{2} r_v (a + b + c).$$

Pokud je obvod i obsah vyjádřen stejným číslem, které označíme x, dostaneme:

$$x = \frac{1}{2} r_v x$$

Odtud dostáváme $r_v = 2$. QED.

Není bez zajímavosti, že perfektních heronovských trojúhelníků není mnoho. Vedle trojúhelníků (6, 8, 10) a (5, 12, 13), které jsou zároveň pythagorejskými, lze najít už pouze tři další (6, 25, 29), (7, 15, 20) a (9, 10, 17).

Heronovské trojúhelníky s celočíselnými těžnicemi

Možná někoho napadne následující otázka: „Existuje heronovský trojúhelník s celočíselnými těžnicemi?“

Dodnes nebyl nalezen žádný takový trojúhelník a jedná se o jeden z dosud otevřených problémů matematiky a teorie čísel. Otázku, zda takový trojúhelník existuje, zpopularizoval ve svých pracích o nevyřešených problémech teorie čísel známý britský matematik Richard K. Guy. Většina matematické komunity se domnívá, že takový trojúhelník neexistuje (někteří matematici s nadsázkou říkají, že takhle „dokonalé trojúhelníky“ jsou vzácné stejně jako jednorožci).

Ačkoliv tři celočíselné těžnice matematice stále vzdorují, je známo, že existuje nekonečně mnoho heronovských trojúhelníků se dvěma celočíselnými těžnicemi. Nejmenší takový trojúhelník objevili Ralph Buchholz a Randall Rathbun v roce 1997. Úlohu řešili pro dvě racionální těžnice a našli trojúhelník (26, 51, 73). Abychom dostali čistě celočíselné hodnoty pro strany, obsah i obě těžnice, stačí jejich základní nalezený trojúhelník zvětšit faktorem 2, dostaneme tak trojúhelník (52, 102, 146).

A které těžnice trojúhelníku (52, 102, 146) jsou právě ty dvě celočíselné? K výpočtu délek těžnic v trojúhelníku zadaném stranami skvěle poslouží Apolloniova věta.

Věta: Součet čtverců nad dvěma stranami trojúhelníka je roven dvojnásobku součtu čtverce nad polovinou třetí strany a čtverce nad těžnicí k této straně.

Což je, mírně řečeno, pro žáka tercie poněkud děsivé souvětí.

Takže větu raději vyjádříme vzorcem:

$$b^2 + c^2 = 2\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + {t_a}^2\right),$$

ze kterého po úpravách dostaneme:

$$t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Číselné hodnoty pro jednotlivé těžnice jsou:

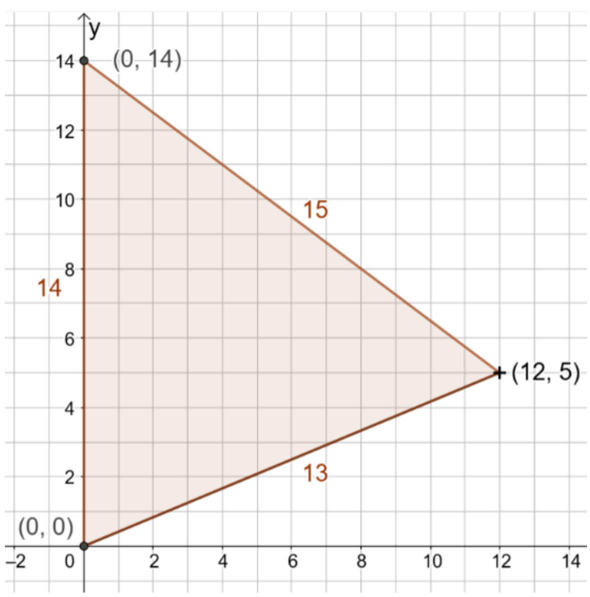
$$t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 102^2 + 2 \cdot 146^2 - 52^2} = 4\sqrt{949}$$
$$t_b = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 146^2 + 2 \cdot 52^2 - 102^2} = 97$$
$$t_c = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 52^2 + 2 \cdot 102^2 - 146^2} = 35$$

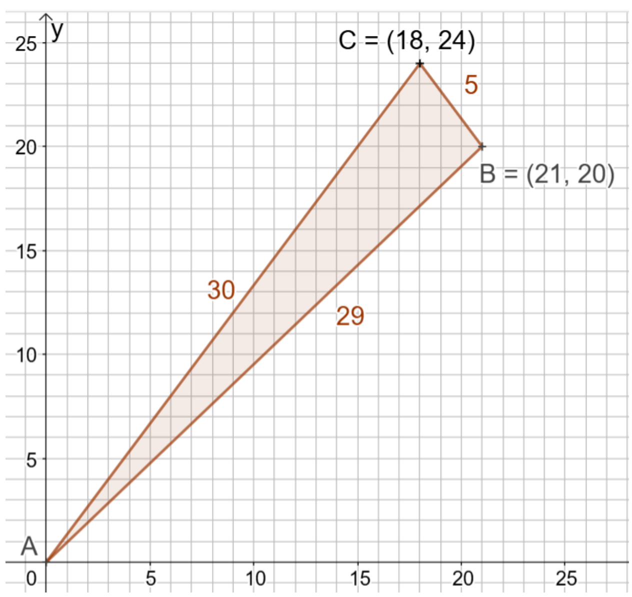
Poznámka: Apolloniova věta pochází od starořeckého matematika Apollonia z Pergy (žil zhruba v letech 240–190 př. n. l.) a je jednoduchým důsledkem kosinové věty.

Heronovské trojúhelníky s vrcholy v mřížových bodech

Nalezení mřížových bodů (souřadnic s celými čísly) pro vrcholy heronovského trojúhelníku je zajímavý geometrický problém. Úloha je vždy řešitelná, každý heronovský trojúhelník lze umístit do soustavy souřadnic tak, aby jeho vrcholy ležely v mřížových bodech.

Řešení takové úlohy ale nemusí být tak jednoduché, jako například v případě trojúhelníku (13, 14, 15), kdy lze jednu stranu umístit na osu x nebo na osu y. Pokud v trojúhelníku ani jedna z výšek nemá celočíselnou délku, je úloha mnohem složitější. Nyní, žádná ze stran trojúhelníku nemůže splývat s osou a trojúhelník je třeba „naklonit“. Můžeme samozřejmě různě experimentovat se souřadnicemi a při řešení si pomáhat nejrůznějšími pythagorejskými trojúhelníky, ale pro rychlé a spolehlivé řešení je třeba sáhnout ke složitějším matematickým postupům využívajícím komplexní čísla nebo analytickou geometrii.





Příklady a úlohy

Příklad 1: Kolik existuje pythagorejských trojúhelníků s odvěsnou délky 2 026?

Řešení: Pro vyhledání pythagorejských trojúhelníků, kde jedna odvěsna má délku 2026, použijeme výše uvedené vzorce pro generování trojic:

$x = m^2 - n^2$; $y = 2mn$; $z = m^2 + n^2$, kde m a n jsou nesoudělná přirozená čísla, $m > n$.

Protože $2\,026 = 2 \cdot 1\,013$, přicházejí v úvahu dvě možnosti:

a) Pro $x = 2026 = m^2 - n^2$ je $m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$ a řešíme buď soustavu rovnic

$$m + n = 2\,026$$
$$m - n = 1,$$

která ovšem nemá řešení v oboru přirozených čísel ($m = 1\,013{,}5$; $n = 1\,012{,}5$), nebo soustavu

$$m + n = 1\,013$$
$$m - n = 2,$$

která ale také nemá řešení v oboru přirozených čísel ($m = 1\,007{,}5$; $n = 1\,005{,}5$).

b) Pro $y = 2\,026 = 2mn$ dostaneme $mn = 1\,013$, což nabízí jediné řešení:

$$m = 1\,013, n = 1.$$

Existuje tedy jediný pythagorejský trojúhelník s odvěsnou 2 026. Druhá odvěsna má délku $m^2 - n^2 = 1\,013^2 - 1^2 = 1\,026\,168$ a přeponou $m^2 + n^2 = 1\,013^2 + 1^2 = 1\,026\,170$.

Příklad 2: Je možné, aby existovalo 2 026 různých pythagorejských trojúhelníků se stejnou délkou přepony?

Řešení: Vezměme součin 2 026 činitelů: $z = (3^2+1)(4^2+1)(5^2+1)\ldots[(2\,026+2)^2+1]$.

Délky odvěsen pro $k = 3, 4, 5, \ldots, 2\,028$ pak zvolíme takto:

$$x_k = \frac{k^2-1}{k^2+1} z \text{ a } y_k = \frac{2k}{k^2+1} z.$$

Protože pro všechna $k = 3, 4, 5, \ldots, 2\,028$ je $\frac{z}{k^2+1}$ přirozené číslo, jsou i x_k a y_k čísla přirozená pro všechna $k = 3, 4, 5, \ldots, 2\,028$.

Ověřme nyní, že ${x_k}^2 + {y_k}^2 = {z_k}^2$.

$${x_k}^2 + {y_k}^2 = \left(\frac{k^2-1}{k^2+1}\right)^2 z^2 + \left(\frac{2k}{k^2+1}\right)^2 z^2 = \frac{k^4 - 2k^2 + 1 + 4k^2}{(k^2+1)^2} z^2 = \frac{k^4 + 2k^2 + 1}{(k^2+1)^2} z^2 = z^2.$$

Ještě je třeba dokázat, že se mezi 2 026 takto vytvořenými trojúhelníky nevyskytují dva shodné. Nejprve ukažme, že je vždy $x_k > y_k$:

$$x_k - y_k = \frac{k^2-1}{k^2+1} z - \frac{2k}{k^2+1} z = \frac{k^2 - 1 - 2k}{k^2+1} z = \frac{(k^2-1)^2 - 2}{k^2+1} z > 0, \text{pro } k \geq 3$$

Ukažme dále, že jsou délky odvěsen x_k uspořádané ($x_k < x_{k+1}$): $x_{k+1} - x_k =$

$$= \frac{(k+1)^2 - 1}{(k+1)^2 + 1} z - \frac{k^2-1}{k^2+1} z = \frac{[(k+1)^2 - 1] \cdot (k^2+1) - [(k+1)^2 + 1] \cdot (k^2-1)}{[(k+1)^2+1] \cdot (k^2+1)} z =$$

$$= \frac{(k^4 + 2k^2) \cdot (k^2+1) - (k^4 + 2k^2 + 2) \cdot (k^2 - 1)}{[(k+1)^2+1] \cdot (k^2+1)} z = \frac{k^6 + 5k^4 + 2k^2 - (k^6 + k^4 - 2)}{[(k+1)^2+1] \cdot (k^2+1)} z =$$

$$= \frac{k^6 + 5k^4 + 2k^2 - k^6 - k^4 + 2}{[(k+1)^2 + 1] \cdot (k^2 + 1)} z = \frac{4k^4 + 2k^2 + 2}{[(k+1)^2 + 1] \cdot (k^2 + 1)} z > 0$$

Poznámka: Pokud si všimneme, že $x_k = \frac{k^2-1}{k^2+1} z$ lze psát jako $x_k = \frac{k^2+1-1-1}{k^2+1} z = z - \frac{2}{k^2+1} z$, nahlédneme platnost nerovnosti $x_k < x_{k+1}$ mnohem rychleji.

Příklad 3: Rozlož heronovský trojúhelník (13, 20, 21) na dva pythagorejské a urči poměr jejich obsahů.

Řešení: Ze zadaných stran vypočteme obsah a jednotlivé výšky:

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(13 + 20 + 21) = 27$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{27(27-13)(27-20)(27-21)} = \sqrt{27 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 6} = 126$$

$$v_a = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 126}{13} = 19\frac{5}{13}$$

$$v_b = \frac{2S}{b} = \frac{2 \cdot 126}{20} = 12\frac{3}{5}$$

$$v_c = \frac{2S}{c} = \frac{2 \cdot 126}{21} = 12$$

Nalezená celočíselná výška $v_c = 12$ je společnou odvěsnou pythagorejských trojúhelníků.

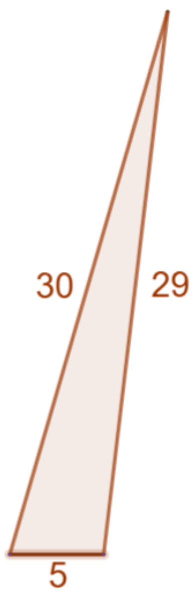
Takové trojúhelníky se nabízejí čtyři: (5, 12, 13), (9, 12, 15), (12, 16, 20) a (12, 35, 37). My ale hledáme ty, co mají přepony o délkách 13 a 20. Vyhovují tedy trojúhelníky (5, 12, 13) a (12, 16, 20).

$$S_1 = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30, S_2 = \frac{12 \cdot 16}{2} = 96$$

$$S_1 : S_2 = 30 : 96 = 5 : 16.$$

Příklad 4:

Nejmenší nerozložitelný primitivní heronovský trojúhelník je (5, 29, 30) s obsahem $S = 72$.



Je zřejmé, že vznikl redukcí většího, podobného heronovského trojúhelníku. Snadno se totiž můžeme přesvědčit, že všechny výšky v tomto trojúhelníku jsou racionální.

Zároveň jsme ale postaveni před problém: Z jakých pythagorejských trojúhelníků byl vytvořen původní neredukovaný heronovský trojúhelník?

Řešení: Nejprve opět vypočteme výšky daného primitivního heronovského trojúhelníku:

$$v_a = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 72}{5} = 28\frac{4}{5}$$

$$v_b = \frac{2S}{b} = \frac{2 \cdot 72}{29} = 4\frac{28}{29}$$

$$v_c = \frac{2S}{c} = \frac{2 \cdot 72}{30} = 4\frac{4}{5}$$

Nyní budeme hledat větší, podobný trojúhelník takový, aby alespoň jedna jeho výška byla přirozené číslo. Vidíme, že stačí všechny rozměry trojúhelníku zvětšit pětkrát. Dostaneme tak trojúhelník (25, 145, 150) s výškou $v_a' = 5 \cdot 28\frac{4}{5} = 144$.

Nyní musíme najít dva pravoúhlé trojúhelníky se společnou odvěsnou 144 a s přeponami 145 a 150 takové, aby rozdíl jejich odvěsen byl 25. Řešením jsou následující pythagorejské trojúhelníky – primitivní (17, 144, 145) a neprimitivní (42, 144, 150).

V trojúhelníku (25, 145, 150) můžeme také využít výšku $v_c' = 5 \cdot 4\frac{4}{5} = 24$. Tak dojdeme k rozkladu na dva primitivní pythagorejské trojúhelníky (7, 24, 25) a (143, 24, 145).

Další řešení bychom pochopitelně obdrželi v trojúhelníku s rozměry zvětšenými 29krát, tedy v trojúhelníku (145, 841, 870) s výškou $v_b' = 29 \cdot 4\frac{28}{29} = 144$. Opět budeme hledat dva pravoúhlé trojúhelníky se společnou odvěsnou 144. Protože výška v_b' leží mimo trojúhelník, musí se délky zbývajících odvěsen lišit o 841. Řešením jsou v tomto případě následující pythagorejské trojúhelníky – primitivní (17, 144, 145) a neprimitivní (858, 144, 870).

Poznámka k příkladu 4:

Rozhodnutí, zda je heronovský trojúhelník rozložitelný na pythagorejské či nikoli lze také svěřit tabulkovému procesoru. O vytvoření funkce `HeronPythagor`, která pro tři zadaná přirozená čísla vypíše, jaký typ trojúhelníku má příslušné strany, jsme požádali ChatGPT.

V tabulce vidíme všechny možné varianty vyhodnocení zadaných hodnot:

a	*b*	*c*	Vlastnosti trojúhelníku
13	20	21	Heronovský a rozložitelný
5	29	30	Heronovský, ale nerozložitelný
25	145	150	Heronovský a rozložitelný
3	4	5	Pythagorejský (primitivní)
10	8	6	Pythagorejský (neprimitivní)
6	7	8	Není heronovský
2	5	7	Není trojúhelník
-2	5	7	Chyba: délky musí být kladné
4	2,5	3	Chyba: musí být celá čísla
5		7	Chyba: nečíselný vstup

První řešení, které ChatGPT vytvořil, nefungovalo. Při prostudování kódu se ukázalo, že došlo ke shodnému označení proměnných pro poloviční obvod (`s`) a obsah (`S`) a bylo nutno na tuto skutečnost ChatGPT upozornit. V níže uvedeném kódu si můžeme povšimnout upravených názvů proměnných – `polObvod` a `obsah`.

```
Public Function HeronPythagor(a As Variant, b As Variant, c As Variant) As String

    If Not (IsNumeric(a) And IsNumeric(b) And IsNumeric(c)) Then
        HeronPythagor = "Chyba: nečíselný vstup"
        Exit Function
    End If

    Dim x As Long, y As Long, z As Long

    If a <> Int(a) Or b <> Int(b) Or c <> Int(c) Then
        HeronPythagor = "Chyba: musí být celá čísla"
        Exit Function
    End If

    x = CLng(a)
    y = CLng(b)
    z = CLng(c)
```

```
    If x <= 0 Or y <= 0 Or z <= 0 Then
        HeronPythagor = "Chyba: délky musí být kladné"
        Exit Function
    End If

    ' Seřazení stran vzestupně
    Call Serad(x, y, z)

    ' Trojúhelníková nerovnost
    If x + y <= z Then
        HeronPythagor = "Není trojúhelník"
        Exit Function
    End If

    ' =========================
    ' TEST PYTHAGOREJSKÝ
    ' =========================

    If x ^ 2 + y ^ 2 = z ^ 2 Then

        If NSD(NSD(x, y), z) = 1 Then
            HeronPythagor = "Pythagorejský (primitivní)"
        Else
            HeronPythagor = "Pythagorejský (neprimitivní)"
        End If

        Exit Function
    End If

    ' =========================
    ' TEST HERONOVSKÝ
    ' =========================

    Dim polObvod As Double
    Dim obsah As Double

    polObvod = (x + y + z) / 2
    obsah = Sqr(polObvod * (polObvod - x) * (polObvod - y) * (polObvod - z))

    If Abs(obsah - Int(obsah)) > 0.0000001 Then
        HeronPythagor = "Není heronovský"
        Exit Function
    End If

    ' =========================
    ' TEST ROZLOŽITELNOSTI
    ' =========================

    If TestRozklad(x, y, z, obsah) Or _
       TestRozklad(y, x, z, obsah) Or _
       TestRozklad(z, x, y, obsah) Then

        HeronPythagor = "Heronovský a rozložitelný"
    Else
        HeronPythagor = "Heronovský, ale nerozložitelný"
    End If

End Function

Private Sub Serad(ByRef a As Long, ByRef b As Long, ByRef c As Long)
    Dim t As Long
    If a > b Then t = a: a = b: b = t
    If b > c Then t = b: b = c: c = t
    If a > b Then t = a: a = b: b = t
End Sub


Private Function NSD(a As Long, b As Long) As Long
    Do While b <> 0
        Dim t As Long
        t = b
        b = a Mod b
        a = t
```

```
    Loop
    NSD = Abs(a)
End Function

Private Function TestRozklad(a As Long, b As Long, c As Long, obsah As Double) As Boolean

    Dim v As Double
    v = 2 * obsah / a

    If Abs(v - Int(v)) > 0.0000001 Then Exit Function

    Dim p As Double, q As Double
    p = Sqr(b ^ 2 - v ^ 2)
    q = Sqr(c ^ 2 - v ^ 2)

    If Abs(p - Int(p)) < 0.0000001 And _
       Abs(q - Int(q)) < 0.0000001 And _
       Abs(p + q - a) < 0.0000001 Then

        TestRozklad = True
    End If

End Function
```

Samotný rozklad libovolného rozložitelného heronovského trojúhelníku na trojúhelníky pýthagorejské se nám zatím pomocí AI nepodařilo získat. Řešení v Excelu vytvořená pomocí ChatGPT nevedla k žádným hodnotám (alespoň v řádu několika minut). Zda to bylo náročností algoritmu nebo se program někde zacyklil, nevíme.

Několik tabulek navíc...

Jako bonus uveďme dvě tabulky celočíselných trojúhelníků s obsahem do 204.

a	*b*	*c*	*S*	*o*	v_a	v_b	v_c		NSD	
3	4	5	6	12	4	3	2 2/5	Pythagorejský trojúhelník	1	
5	5	6	12	16	4 4/5	4 4/5	4		1	
5	5	8	12	18	4 4/5	4 4/5	3		1	
6	8	10	24	24	8	6	4 4/5	Pythagorejský trojúhelník	2	× (3, 4, 5)
4	13	15	24	32	12	3 9/13	3 1/5		1	
5	12	13	30	30	12	5	4 8/13	Pythagorejský trojúhelník	1	
9	10	17	36	36	8	7 1/5	4 4/17		1	
3	25	26	36	54	24	2 22/25	2 10/13		1	
7	15	20	42	42	12	5 3/5	4 1/5		1	
10	10	12	48	32	9 3/5	9 3/5	8		2	× (5, 5, 6)
10	10	16	48	36	9 3/5	9 3/5	6		2	× (5, 5, 8)
9	12	15	54	36	12	9	7 1/5	Pythagorejský trojúhelník	3	× (3, 4, 5)
10	13	13	60	36	12	9 3/13	9 3/13		1	
8	15	17	60	40	15	8	7 1/17	Pythagorejský trojúhelník	1	
13	13	24	60	50	9 3/13	9 3/13	5		1	
6	25	29	60	60	20	4 4/5	4 4/29		1	
11	13	20	66	44	12	10 2/13	6 3/5		1	
5	29	30	72	64	28 4/5	4 28/29	4 4/5		1	
13	14	15	84	42	12 12/13	12	11 1/5		1	
10	17	21	84	48	16 4/5	9 15/17	8		1	
7	24	25	84	56	24	7	6 18/25	Pythagorejský trojúhelník	1	
8	29	35	84	72	21	5 23/29	4 4/5		1	
12	17	25	90	54	15	10 10/17	7 1/5		1	
4	51	53	90	108	45	3 9/17	3 21/53		1	
12	16	20	96	48	16	12	9 3/5	Pythagorejský trojúhelník	4	× (3, 4, 5)
8	26	30	96	64	24	7 5/13	6 2/5		2	× (4, 13, 15)
15	15	18	108	48	14 2/5	14 2/5	12		3	× (5, 5, 6)
15	15	24	108	54	14 2/5	14 2/5	9		3	× (5, 5, 8)
19	20	37	114	76	12	11 2/5	6 6/37		1	
16	17	17	120	50	15	14 2/17	14 2/17		1	
10	24	26	120	60	24	10	9 3/13	Pythagorejský trojúhelník	2	× (5, 12, 13)
17	17	30	120	64	14 2/17	14 2/17	8		1	
16	25	39	120	80	15	9 3/5	6 2/13		1	

a	*b*	*c*	*S*	*o*	v_a	v_b	v_c		NSD	
13	20	21	126	54	19 5/13	12 3/5	12		1	
15	28	41	126	84	16 4/5	9	6 6/41		1	
5	51	52	126	108	50 2/5	4 16/17	4 11/13		1	
11	25	30	132	66	24	10 14/25	8 4/5		1	
18	20	34	144	72	16	14 2/5	8 8/17		2	× (9, 10, 17)
6	50	52	144	108	48	5 19/25	5 7/13		2	× (3, 25, 26)
15	20	25	150	60	20	15	12	Pythagorejský trojúhelník	5	× (3, 4, 5)
15	26	37	156	78	20 4/5	12	8 16/37		1	
13	40	51	156	104	24	7 4/5	6 2/17		1	
14	25	25	168	64	24	13 11/25	13 11/25		1	
10	35	39	168	84	33 3/5	9 3/5	8 8/13		1	
14	30	40	168	84	24	11 1/5	8 2/5		2	× (7, 15, 20)
25	25	48	168	98	13 11/25	13 11/25	7		1	
13	30	37	180	80	27 9/13	12	9 27/37		1	
9	40	41	180	90	40	9	8 32/41	Pythagorejský trojúhelník	1	
20	20	24	192	64	19 1/5	19 1/5	16		4	× (5, 5, 6)
20	20	32	192	72	19 1/5	19 1/5	12		4	× (5, 5, 8)
12	55	65	198	132	33	7 1/5	6 6/65		1	
17	25	26	204	68	24	16 8/25	15 9/13		1	

A ještě jedna tabulka

Během našeho bádání nás napadlo, že by bylo docela praktické mít přehlednou tabulku (pouze) heronovských trojúhelníků, ve které budou vypsány příslušné trojice obsahující jako nejkratší stranu postupně všechna přirozená čísla od 3 do 100.

Tabulka je vygenerovaná programem v Pythonu, vytvořený pomocí Google Gemini.

AI se za svůj výtvor sama pochválila: „Kód v Pythonu chytře využívá pravidlo o sudém obvodu (aby zbytečně neprohledával lichá čísla) a pro každou nejkratší stranu *a* (od 3 do 102) najde zaručeně ten trojúhelník, který má absolutně nejmenší možný obvod. Zároveň obsahuje všechny pojistky: hlídá trojúhelníkovou nerovnost, testuje primitivitu (největší společný dělitel je 1) a rovnou zahazuje všechny pravoúhlé (pythagorejské) trojúhelníky."

Strana a	Strana b	Strana c	Obvod	Obsah
3	25	26	54	36
4	13	15	32	24
5	5	6	16	12
6	25	29	60	60
7	15	20	42	42
8	29	35	72	84
9	10	17	36	36
10	13	13	36	60
11	13	20	44	66
12	17	25	54	90
13	14	15	42	84
14	25	25	64	168
15	26	37	78	156
16	17	17	50	120
17	17	30	64	120
18	41	41	100	360
19	20	37	76	114
20	37	51	108	306
21	41	50	112	420

22	61	61	144	660
23	123	130	276	1380
24	37	37	98	420
25	29	36	90	360
26	35	51	112	420
27	29	52	108	270
28	65	89	182	546
29	29	40	98	420
30	101	125	256	1008
31	68	87	186	930
32	53	75	160	720
33	34	65	132	264
34	61	75	170	1020
35	44	75	154	462
36	61	65	162	1080
37	39	52	128	720
38	65	87	190	1140
39	41	50	130	780
40	51	77	168	924
41	51	58	150	1020
42	185	221	448	2184
43	61	68	172	1290
44	65	87	196	1386
45	85	104	234	1872
46	75	109	230	1380
47	250	267	564	5640
48	85	91	224	2016
49	122	123	294	2940
50	69	73	192	1656
51	52	53	156	1170
52	61	87	200	1560
53	53	56	162	1260
54	149	175	378	3780
55	84	125	264	1848
56	61	75	192	1680
57	65	68	190	1710
58	65	119	242	924
59	68	109	236	1770
60	73	91	224	2184
61	74	87	222	2220
62	123	125	310	3720
63	169	218	450	3780
64	111	145	320	3360
65	65	66	196	1848
66	175	221	462	4620
67	85	116	268	2814
68	75	77	220	2310
69	113	140	322	3864
70	95	101	266	3192
71	447	476	994	14910
72	85	85	242	2772
73	73	96	242	2640
74	145	213	432	2556
75	86	97	258	3096
76	85	105	266	3192

77	123	130	330	4620
78	89	89	256	3120
79	183	212	474	7110
80	91	165	336	1848
81	113	130	324	4536
82	111	145	338	4524
83	85	164	332	1494
84	97	169	350	2730
85	93	116	294	3906
86	315	373	774	10836
87	100	143	330	4290
88	125	125	338	5148
89	99	100	288	3960
90	97	119	306	4284
91	115	116	322	4830
92	111	119	322	4830
93	181	212	486	8370
94	181	195	470	8460
95	159	178	432	7524
96	149	203	448	6720
97	97	130	324	4680
98	1201	1201	2500	58800
99	113	140	352	5544
100	115	123	338	5382

Zdroje

J. Zhouf: Trojúhelníky s celočíselnými délkami stran – Dva dny s didaktikou matematiky 2010 (Sborník příspěvků)

Antonín Slavík: Pýthagorejské trojúhelníky a jiné úlohy https://www.karlin.mff.cuni.cz/~slavik/papers/pythagorejske-trojuhelniky-a-jine-ulohy.pdf

M. Sláma: Pythagorejské trojúhelníky. Bakalářská práce, Pedagogická fakulta UK, 2015. Dostupné na: http://tinyurl.com/ey3hm9wc

Alice Dohnalová: Heronovské trojúhelníky. Diplomová práce, Pedagogická fakulta JČU, 2010. Dostupné na: http://tinyurl.com/kb5ux5c6

Ron Knott: Pythagorean Right-Angled Triangles Dostupné na https://r-knott.surrey.ac.uk/pythag/pythag.html

Andrew Roibal and Abdulkadir Hassen: Triangles On the Lattice of Integers Dostupné na https://users.rowan.edu/~hassen/Papers/TRIANGLES%20ON%20THE%20LATTICE%20OF%20INTEGERS.pdf

RH Dye & RWD Nickalls: A new algorithm for generating Pythagorean triples

Dostupné na https://www.nickalls.org/dick/papers/maths/pythagtriples1998.pdf