

Uživatelsky přívětivé trojúhelníky

Evžen Müller, Julie Čepelková, Aneta Nekvindová, Matěj Zamouřil

Zemědělská akademie a Gymnázium Hořice

Ani jeden matematický talent nazmar, květen 2026

Uživatelsky přívětivé trojúhelníky? Co co si pod tím představujeme?

Hledáme „dokonalý“ útvar oplývající mnoha život studentův nekomplikujícími vlastnostmi.

Významným adeptem by mohl být **trojúhelník rovnostranný**:

- všechny strany stejně dlouhé, tři osy souměrnosti;
- vnitřní úhly o velikosti 60° , vystačíme si s pravítkem a kružítkem;
- těžiště, průsečík výšek, střed kružnice opsané i vepsané splývají do jediného bodu;
- jeden ze tří pravidelných útvarů (se čtvercem a pravidelným šestiúhelníkem), kterými lze beze zbytku vyplnit plochu;
- ze šesti stejných rovnostranných trojúhelníků složíme pravidelný šestiúhelník;
- povrch pravidelného čtyřstěnu tvoří čtyři shodné rovnostranné trojúhelníky...

Ale ouha!

Výška rovnostranného trojúhelníka $v_a = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ a jeho obsah $S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$.

Výrazy s $\sqrt{3}$ mnohým žákům připadají jako přízraky z jiného světa...

Trojúhelníky rovnostranné musí chtě nechtě dát přednost v jízdě jiným...



Pýthagorejské trojúhelníky

Pýthagorejský trojúhelník je pravoúhlý trojúhelník, jehož délky stran jsou vyjádřeny přirozenými čísly.

Délky stran se často označují jako *pýthagorejská trojice* (x, y, z) .

Nejznámější trojice $(3, 4, 5)$, $(6, 8, 10)$, $(5, 12, 13)$, $(8, 15, 17)$, ...

Pýthagorejské trojúhelníky (x, y, z) nazýváme *primitivní*, jestliže čísla x , y a z jsou nesoudělná, neboli $D(x, y, z) = 1$.

Některé zajímavé vlastnosti primitivních pýthagorejských trojúhelníků:

- délky odvěsen mají odlišnou paritu,
- délka alespoň jedné odvěsny je dělitelná třemi,
- délka jedné odvěsny je dělitelná čtyřmi,
- délka alespoň jedné strany je dělitelná pěti,
- obsah každého pýthagorejského trojúhelníku je dělitelný šesti (důsledek předchozího).

Další zajímavé vlastnosti uvedeme později...

Pýthagorejské trojúhelníky podle Pýthagorejců

Pýthagorejské trojúhelníky generovali Pýthagorejci takto:

- $a = 2p + 1$,
- $b = 2p^2 + 2p$,
- $c = 2p^2 + 2p + 1$, (pro všechna přirozená čísla p).

Jednoduchý důkaz (pro tercii):

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (2p + 1)^2 + (2p^2 + 2p)^2 = \\ &= 4p^2 + 4p + 1 + 4p^4 + 8p^3 + 4p^2 = \\ &= 4p^4 + 8p^3 + 8p^2 + 4p + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= (2p^2 + 2p + 1)^2 = \\ &= 4p^4 + 4p^3 + 2p^2 + 4p^3 + 4p^2 + 2p + 2p^2 + 2p + 1 = \\ &= 4p^4 + 8p^3 + 8p^2 + 4p + 1 = a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Dostáváme pouze trojúhelníky s přeponou o jedna delší než je délka větší z odvěsen.

p	$2p + 1$	$2p^2 + 2p$	$2p^2 + 2p + 1$
1	3	4	5
2	5	12	13
3	7	24	25
4	9	40	41
5	11	60	61
6	13	84	85
7	15	112	113
8	17	144	145
9	19	180	181
10	21	220	221
11	23	264	265
12	25	312	313
13	27	364	365
14	29	420	421
15	31	480	481
16	33	544	545
17	35	612	613
18	37	684	685
19	39	760	761
20	41	840	841

Pýthagorejské trojúhelníky v Mezopotámii

Pýthagorejské trojúhelníky generovali Babylóňané takto:

- $a = m^2 - 1$;
- $b = 2m$;
- $c = m^2 + 1$, (pro všechna přirozená čísla $m > 1$).

Důkaz je jednoduchý...

Dostáváme pouze trojúhelníky, kde přepona je o dvě delší, než je délka větší odvěsny.

Každý druhý trojúhelník (pro m liché) není primitivní, po zkrácení stran na polovinu však ano =>

=> všechny trojúhelníky vytvořené postupem Pýthagorejců

Stále ale chybí spousta primitivních pýthagorejských trojúhelníků, např. (33, 56, 65), (39, 80, 89), (65, 72, 97).

m	$2m$	$m^2 - 1$	$m^2 + 1$
2	4	3	5
3	6	8	10
4	8	15	17
5	10	24	26
6	12	35	37
7	14	48	50
8	16	63	65
9	18	80	82
10	20	99	101
11	22	120	122
12	24	143	145
13	26	168	170
14	28	195	197
15	30	224	226
16	32	255	257
17	34	288	290
18	36	323	325
19	38	360	362
20	40	399	401

Pýthagorejské trojúhelníky – nejlepší metoda

Věta:

Každý primitivní pythagorejský trojúhelník (x, y, z) ,

kde y je sudé číslo, se dá zapsat ve tvaru

$$x = m^2 - n^2; y = 2mn; z = m^2 + n^2,$$

kde m a n jsou nesoudělná přirozená čísla, $m > n$.

Důkaz věty?

Když nám zbyde trocha času...

Vedle primitivních pythagorejských trojúhelníků tak dostaneme i mnohé další, zdaleka ale ne všechny.

Chybí například ...

$(9, 12, 15)$, $(15, 36, 39)$, $(24, 45, 51)$, ...

...náhoda?

m	n	a	b	c	násobek	
2	1	3	4	5	1	Primitivní PT
3	1	8	6	10	2	
3	2	5	12	13	1	Primitivní PT
4	1	15	8	17	1	Primitivní PT
4	2	12	16	20	4	
4	3	7	24	25	1	Primitivní PT
5	1	24	10	26	2	
5	2	21	20	29	1	Primitivní PT
5	3	16	30	34	2	
5	4	9	40	41	1	Primitivní PT
6	1	35	12	37	1	Primitivní PT
6	2	32	24	40	8	
6	3	27	36	45	9	
6	4	20	48	52	4	
6	5	11	60	61	1	Primitivní PT

Pýthagorejské trojúhelníky – historické okénko

Obsahuje hliněná tabulka (stará zhruba 3800 let) označovaná jako Plimpton 322 naše vzorce?

$$x = m^2 - n^2; y = 2mn; z = m^2 + n^2,$$

pro m a n nesoudělná přirozená čísla, $m > n$.

- Tabulka pochází nejspíše z nelegálních vykopávek,
- pojmenována po sběrateli Georgu Plimptonovi,
- od r. 1936 v knihovně Columbia University (NY),
- číselné údaje zahrnují mj. pýthagorejské trojice,
- M. Bečvářová, J. Veselý: Plimpton 322 – přelomový objev?
- spory o smyslu, vzniku a obsahu tabulky pokračují...



Pýthagorejské trojúhelníky generované Fibonacciho posloupností

Uvažujme Fibonacciho posloupnost generovanou libovolnými přirozenými členy f_1 a f_2 .

Použijeme libovolné čtyři po sobě jdoucí členy :

Odvěsny: $a = 2 \cdot f_{n+1} \cdot f_{n+2}, b = f_n \cdot f_{n+3}$

Přepona: $c = f_{n+2} \cdot f_{n+3} - f_n \cdot f_{n+1}$ (existují i jiné možnosti)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

od $n =$	1	2	3	4	5	6	7
$a =$	4	12	30	80	208	546	1428
$b =$	3	5	16	39	105	272	715
$c =$	5	13	34	89	233	610	1597

primitivní	primitivní		primitivní	primitivní		primitivní
------------	------------	--	------------	------------	--	------------

Pýthagorejské trojúhelníky generované Fibonacciho posloupností (2)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_n	2	7	9	16	25	41	66	107	173	280

od $n =$	1	2	3	4	5	6	7
$a =$	126	288	800	2050	5412	14124	37022
$b =$	32	175	369	1056	2675	7093	18480
$c =$	130	337	881	2306	6037	15805	41378
		primitivní	primitivní		primitivní	primitivní	

Pro takto generované trojúhelníky platí:

- Obsah $S = f_n \cdot f_{n+1} \cdot f_{n+2} \cdot f_{n+3}$;
- Obvod $o = 2 \cdot f_{n+2} \cdot f_{n+3}$;
- Poloměr vepsané kružnice $r_v = f_n \cdot f_{n+1}$.

Máme opravdu nádherné důkazy těchto tvrzení, ale nevejdou se nám ani na okraj...

Pýthagorejské trojúhelníky generované Fibonacciho posloupností (3)

Co lze například vyčíst z tabulky:

- Zadáním sudých hodnot f_1 a f_2 neobdržíme žádné primitivní trojúhelníky (zřejmé),
- po dvou primitivních trojúhelnících přichází vždy trojúhelník, který lze redukovat.

Jak to lze vysvětlit?

- Po dvou lichých členech Fibonacciho posloupnosti následuje vždy člen sudý,
- Je-li f_n sudé, pak jsou sudé obě odvěsny $a = 2f_{n+1}f_{n+2}$, $b = f_n f_{n+3}$ i přepona.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

od $n =$	1	2	3	4	5	6	7
$a =$	4	12	30	80	208	546	1428
$b =$	3	5	16	39	105	272	715
$c =$	5	13	34	89	233	610	1597
	primitivní	primitivní		primitivní	primitivní		primitivní

Pýthagorejské trojúhelníky – další zajímavé vlastnosti

- Existuje pouze konečný počet PT, kde x je daná délka odvěsny.
- Délky obou odvěsen nemohou být současně druhými mocninami přirozených čísel.
- Délka jedné z odvěsen a délka přepony nemohou být současně druhými mocninami přirozených čísel.
- Neexistuje PT, který by měl za odvěsny přeponu a odvěsnu jiného PT.

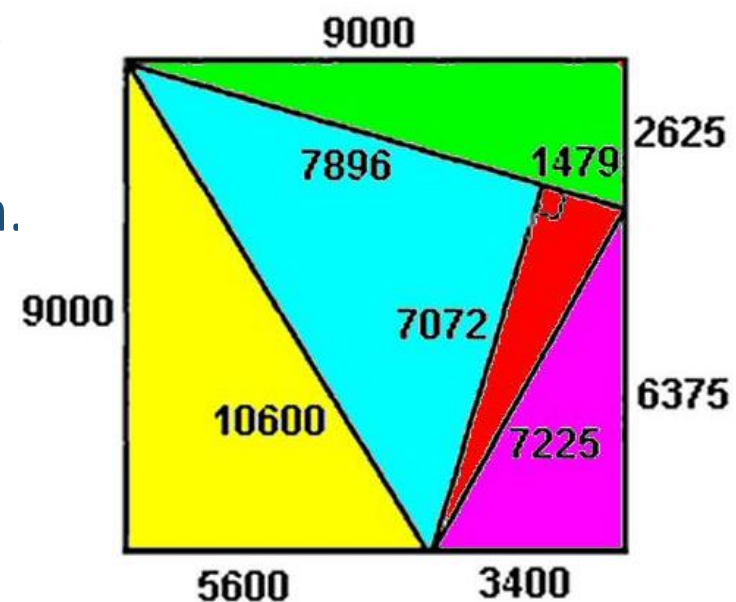
K dalším zajímavým skutečnostem se dostaneme za chvíli...

Existují čtverce, které lze složit z pěti PT.

Pokusy složit čtverec z méně než pěti PT skončily nezdarem.



Kdo se to na nás přišel podívat?
Pan Heron Alexandrijský.
Dále pokračujme s ním...



Heronovské trojúhelníky – úvod



- Heron Alexandrijský (zvaný Méchanikos) – starověký matematik a vynálezce.
- Žil v letech 10–70 n. l. v Alexandrii, působil v proslulém Múseiu.
- Součástí tohoto centra tehdejší vědy byla také alexandrijská knihovna.
- Heron se zabýval problémy z matematiky, mechaniky, optiky a dalších oblastí fyziky.
- Heron mimo jiné publikoval a dokázal vzorec pro obsah trojúhelníku.
- Heronův vzorec $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Heronovské trojúhelníky nazýváme trojúhelníky, jejichž strany mají celočíselné délky a zároveň mají celočíselný obsah.

Poznámka: Mezi heronovské trojúhelníky patří samozřejmě všechny pythagorejské trojúhelníky. Heronovské trojúhelníky však mohou být nejen pravoúhlé, ale také ostroúhlé nebo tupoúhlé.

Heronovský trojúhelník s délkami stran x , y a z budeme značit $[x; y; z]$.

Heronovské trojúhelníky

Definice: Necht' k je přirozené číslo, $[kx; ky; kz]$ a $[x; y; z]$ jsou heronovské trojúhelníky. Trojúhelník $[x; y; z]$ se nazývá *redukovaný heronovský trojúhelník*.

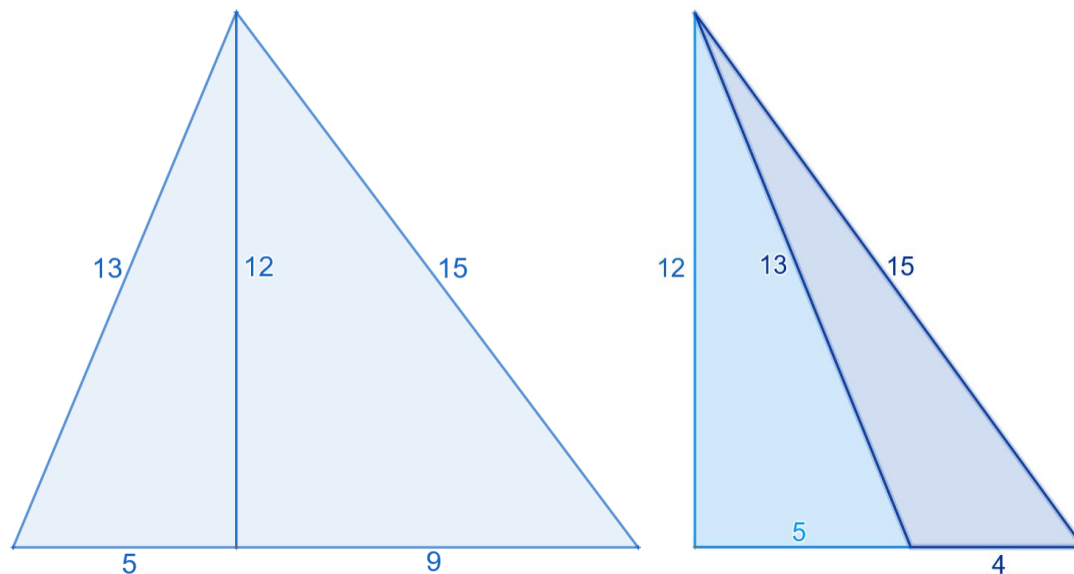
Heronovský trojúhelník $[x; y; z]$ nazveme primitivní, jestliže čísla x , y a z jsou nesoudělná, neboli $D(x, y, z) = 1$.

Pokud najdeme dva pythagorejské trojúhelníky se stejnou odvěsnou, můžeme je snadno vytvořit.

Společná odvěsna – výška v heronovském

Vyjděme z trojúhelníků $(9, 12, 15)$ a $(5, 12, 13)$:

- ostroúhlý heronovský trojúhelník $[13, 14, 15]$;
- tupoúhlý heronovský trojúhelník $[4, 13, 15]$.



Obsah ostroúhlého trojúhelníku je $\frac{5 \cdot 12}{2} + \frac{9 \cdot 12}{2} = 84$ a tupoúhlého $\frac{9 \cdot 12}{2} - \frac{5 \cdot 12}{2} = 24$.

Heronovské trojúhelníky – vlastnosti

Věta: Obvod každého heronovského trojúhelníku je sudé číslo.

Důkaz (provedeme sporem):

Předpokládejme, že obvod nějakého heronovského trojúhelníku je liché číslo, tedy buď jsou všechny tři jeho strany liché, nebo jsou dvě sudé a jedna lichá (tu můžeme bez újmy na obecnosti označit a).

Čísla $(a + b + c)$, $(b + c - a)$, $(a + c - b)$ a $(a + b - c)$ jsou pak všechna lichá.

Ve výrazu pro obsah takového trojúhelníku pod odmocninou nedostaneme celé číslo.

$$S = \sqrt{\frac{a + b + c}{2} \cdot \frac{b + c - a}{2} \cdot \frac{a + c - b}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2}}$$

Ani obsah pak není celé číslo, trojúhelník by tedy nemohl být heronovský, což je spor.

Důsledek věty: Každý primitivní heronovský trojúhelník má dvě strany liché a jednu sudou.

Heronovské trojúhelníky – vlastnosti

Věta: Rovnoramenný heronovský trojúhelník, ve kterém $a = b$, má třetí stranu c sudé délky a výška na tuto stranu v_c je přirozené číslo..

Důkaz (v textu k prezentaci)...

Věta (bez důkazu): Trojúhelník je heronovský tehdy a jen tehdy, když je kombinací dvou pythagorejských trojúhelníků podle společné odvěsny, nebo je redukováným heronovským trojúhelníkem z kombinace pythagorejských trojúhelníků.

Věta (bez důkazu): Pro poloměr kružnice vepsané libovolnému heronovskému trojúhelníku $[a; b; c]$ platí:

$$r_v = \frac{S}{\frac{1}{2}(a + b + c)} = \frac{2S}{(a + b + c)}$$

Poznámka: Právě uvedená věta platí pro každý trojúhelník. Bude se nám hodit později...

Heronovské trojúhelníky – generování

Pro generování heronovských trojúhelníků existují různé metody.

My využili větu nazývanou *Carmichaelova poučka*:

Trojúhelník s celočíselnými stranami délek a , b , c je heronovský tehdy, jsou-li délky jeho stran vyjádřeny vztahy:

$$a = \frac{(m - n)(k^2 + mn)}{d}, \quad b = \frac{m(k^2 + n^2)}{d}, \quad c = \frac{n(k^2 + m^2)}{d},$$

kde $d, k, m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ a d je libovolný dělitel všech čitateľů.

Tato metoda vygeneruje trojúhelníky nejen heronovské, ale také pýthagorejské.

Pouze část z nich je přímo primitivních, mnohé je třeba na primitivní ještě redukovat.

Ke generování heronovských trojúhelníků jsme opět použili MS Excel.

Vytvořili jsme více tabulek pro $k = 1, 2, 3$ a 4 .

Přesto jsou tabulky poněkud chaotické...

Heronovské trojúhelníky – generování

Heronovské trojúhelníky pro $k = 1$:

k	m	n	$(m-n)(k^2+mn)$	$m(k^2+n^2)$	$n(k^2+m^2)$	NSD	a	b	c	S	p/h
1	2	1	3	4	5	1	3	4	5	6	pyth
1	3	1	8	6	10	2	4	3	5	6	pyth
1	3	2	7	15	20	1	7	15	20	42	her
1	4	1	15	8	17	1	15	8	17	60	pyth
1	4	2	18	20	34	2	9	10	17	36	her
1	4	3	13	40	51	1	13	40	51	156	her
1	5	1	24	10	26	2	12	5	13	30	pyth
1	5	2	33	25	52	1	33	25	52	330	her
1	5	3	32	50	78	2	16	25	39	120	her
1	5	4	21	85	104	1	21	85	104	420	her
1	6	1	35	12	37	1	35	12	37	210	pyth
1	6	2	52	30	74	2	26	15	37	156	her
1	6	3	57	60	111	3	19	20	37	114	her
1	6	4	50	102	148	2	25	51	74	300	her
1	6	5	31	156	185	1	31	156	185	930	her

Heronovské trojúhelníky – generování

Heronovské trojúhelníky pro $k = 2$:

k	m	n	$(m-n)(k^2+mn)$	$m(k^2+n^2)$	$n(k^2+m^2)$	NSD	a	b	c	S	p/h
2	2	1	6	10	8	2	3	5	4	6	pyth
2	3	1	14	15	13	1	14	15	13	84	her
2	3	2	10	24	26	2	5	12	13	30	pyth
2	4	1	24	20	20	4	6	5	5	12	her
2	4	2	24	32	40	8	3	4	5	6	pyth
2	4	3	16	52	60	4	4	13	15	24	her
2	5	1	36	25	29	1	36	25	29	360	her
2	5	2	42	40	58	2	21	20	29	210	pyth
2	5	3	38	65	87	1	38	65	87	1140	her
2	5	4	24	100	116	4	6	25	29	60	her
2	6	1	50	30	40	10	5	3	4	6	pyth
2	6	2	64	48	80	16	4	3	5	6	pyth
2	6	3	66	78	120	6	11	13	20	66	her
2	6	4	56	120	160	8	7	15	20	42	her
2	6	5	34	174	200	2	17	87	100	510	her

Heronovské trojúhelníky – generování

Heronovské trojúhelníky pro $k = 3$:

k	m	n	$(m-n)(k^2+mn)$	$m(k^2+n^2)$	$n(k^2+m^2)$	NSD	a	b	c	S	p/h
3	2	1	11	20	13	1	11	20	13	66	her
3	3	1	24	30	18	6	4	5	3	6	pyth
3	3	2	15	39	36	3	5	13	12	30	pyth
3	4	1	39	40	25	1	39	40	25	468	her
3	4	2	34	52	50	2	17	26	25	204	her
3	4	3	21	72	75	3	7	24	25	84	pyth
3	5	1	56	50	34	2	28	25	17	210	her
3	5	2	57	65	68	1	57	65	68	1710	her
3	5	3	48	90	102	6	8	15	17	60	pyth
3	5	4	29	125	136	1	29	125	136	1740	her
3	6	1	75	60	45	15	5	4	3	6	pyth
3	6	2	84	78	90	6	14	13	15	84	her
3	6	3	81	108	135	27	3	4	5	6	pyth
3	6	4	66	150	180	6	11	25	30	132	her
3	6	5	39	204	225	3	13	68	75	390	her

Heronovské trojúhelníky – generování

Heronovské trojúhelníky pro $k = 4$:

k	m	n	$(m-n)(k^2+mn)$	$m(k^2+n^2)$	$n(k^2+m^2)$	NSD	a	b	c	S	p/h
4	2	1	18	34	20	2	9	17	10	36	her
4	3	1	38	51	25	1	38	51	25	456	her
4	3	2	22	60	50	2	11	30	25	132	her
4	4	1	60	68	32	4	15	17	8	60	pyth
4	4	2	48	80	64	16	3	5	4	6	pyth
4	4	3	28	100	96	4	7	25	24	84	pyth
4	5	1	84	85	41	1	84	85	41	1680	her
4	5	2	78	100	82	2	39	50	41	780	her
4	5	3	62	125	123	1	62	125	123	3720	her
4	5	4	36	160	164	4	9	40	41	180	pyth
4	6	1	110	102	52	2	55	51	26	660	her
4	6	2	112	120	104	8	14	15	13	84	her
4	6	3	102	150	156	6	17	25	26	204	her
4	6	4	80	192	208	16	5	12	13	30	pyth
4	6	5	46	246	260	2	23	123	130	1380	her

Perfektní heronovské trojúhelníky

Trojúhelník, jehož obvod i obsah jsou vyjádřeny stejným přirozeným číslem, nazýváme *perfektní heronovský trojúhelník*. Tyto trojúhelníky mají některé zajímavé vlastnosti.

Věta: Poloměr kružnice vepsané perfektnímu heronovskému trojúhelníku, je roven 2.

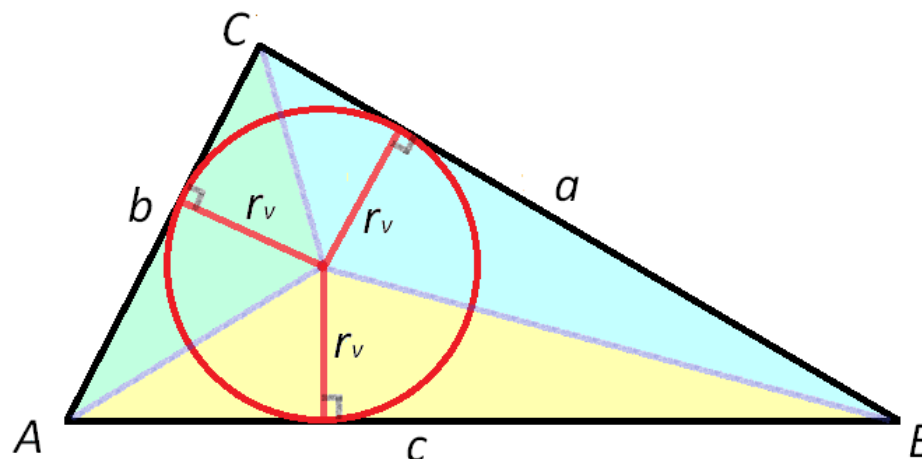
Důkaz: Využijeme vyjádření obsahu trojúhelníku z jeho stran a poloměru vepsané kružnice.

Odvození je patrné z obrázku.

$$S = \frac{a \cdot r_v}{2} + \frac{b \cdot r_v}{2} + \frac{c \cdot r_v}{2} = \frac{1}{2} r_v (a + b + c).$$

Pokud je obvod i obsah vyjádřen stejným číslem, které označíme x , dostaneme:

$$x = \frac{1}{2} r_v x \Rightarrow r_v = 2.$$



Perfektní heronovské trojúhelníky

Perfektních heronovských trojúhelníků není mnoho.

Vedle trojúhelníků (6, 8, 10) a (5, 12, 13), které jsou zároveň pýthagorejskými, lze najít už pouze tři další [6, 25, 29], [7, 15, 20] a [9, 10, 17].

$$(6, 8, 10): o = 24, S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)} = 24$$

$$(5, 12, 13): o = 30, S = \sqrt{15(15-5)(15-12)(15-13)} = \sqrt{900} = 30$$

$$[6, 25, 29]: o = 60, S = \sqrt{30(30-6)(30-25)(30-29)} = \sqrt{3\,600} = 60$$

$$[7, 15, 20]: o = 42, S = \sqrt{21(21-7)(21-15)(21-20)} = \sqrt{1\,764} = 42$$

$$[9, 10, 17]: o = 36, S = \sqrt{18(18-9)(18-10)(18-17)} = \sqrt{1\,296} = 36$$

Dále už číselná hodnota obsahu vždy převyšuje velikost obvodu...

Konsekutivní heronovské trojúhelníky

Délky stran jsou tři po sobě jdoucí přirozená čísla.

Například trojúhelníky [3, 4, 5], [13, 14, 15] nebo [51, 52, 53] (s obsahem 1170).

Existují ještě nějaké další a jak je případně zkonstruovat?

Zkusme je najít...

Protože v našem trojúhelníku musí být dvě strany liché a jedna sudá, zkusme psát:

$$a = 2k - 1, b = 2k, c = 2k + 1, \text{ pro nějaké přirozené číslo } k.$$

Polovina obvodu trojúhelníku je $s = 3k$, což je přirozené číslo...

$$\begin{aligned} \text{Obsah z Heronova vzorce je } S &= \sqrt{3k(3k - 2k + 1)(3k - 2k)(3k - 2k - 1)} = \\ &= \sqrt{3k(k + 1)k(k - 1)} = k\sqrt{3(k^2 - 1)}. \text{ To vypadá slibně...} \end{aligned}$$

Konsekutivní heronovské trojúhelníky

Nyní hledíme, pro jaká k je výraz $k\sqrt{3(k^2 - 1)}$ přirozené číslo.

Výraz pod odmocninou označíme: $3(k^2 - 1) = y^2$

Zřejmě $3|y^2$, a proto také $3|y$. Označme tedy $y = 3u$, kde $u \in \mathbb{N}$.

Dosadíme za y a dojdeme k rovnici $k^2 - 3u^2 = 1$ (speciální tvar tzv. Pellovy rovnice)

Rovnici vyhovují hodnoty $k_1 = 2, u_1 = 1$, což vede ke stranám $a = 3, b = 4, c = 5$.

Další řešení získáme z rekurentního vyjádření: $k_{n+1} = 2k_n + 3u_n, u_{n+1} = k_n + 2u_n$.

$$k_2 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7, u_2 = 2 + 2 \cdot 1 = 4 \qquad a = 13, b = 14, c = 15$$

$$k_3 = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 4 = 26, u_3 = 7 + 2 \cdot 4 = 15 \qquad a = 51, b = 52, c = 53$$

$$k_4 = 2 \cdot 26 + 3 \cdot 15 = 97, u_4 = 26 + 2 \cdot 15 = 56 \qquad a = 193, b = 194, c = 195$$

Opět vhodná příležitost vygenerovat si trojúhelníky v MS Excelu a ověřit jejich obsah.

Konsekutivní heronovské trojúhelníky – prvních dvacet

n	k_n	u_n	a	b	c	obvod	obsah
1	2	1	3	4	5	12	6
2	7	4	13	14	15	42	84
3	26	15	51	52	53	156	1170
4	97	56	193	194	195	582	16296
5	362	209	723	724	725	2172	226974
6	1351	780	2701	2702	2703	8106	3161340
7	5042	2911	10083	10084	10085	30252	44031786
8	18817	10864	37633	37634	37635	112902	613283664
9	70226	40545	140451	140452	140453	421356	8541939510
10	262087	151316	524173	524174	524175	1572522	1,18974E+11
11	978122	564719	1956243	1956244	1956245	5868732	1,65709E+12
12	3650401	2107560	7300801	7300802	7300803	21902406	2,30803E+13
13	13623482	7865521	27246963	27246964	27246965	81740892	3,21467E+14
14	50843527	29354524	101687053	101687054	101687055	305061162	4,47746E+15
15	189750626	109552575	379501251	379501252	379501253	1138503756	6,2363E+16
16	708158977	408855776	1416317953	1416317954	1416317955	4248953862	8,68605E+17
17	2642885282	1525870529	5285770563	5285770564	5285770565	15857311692	1,20981E+19
18	9863382151	5694626340	19726764301	19726764302	19726764303	59180292906	1,68505E+20
19	36810643322	21252634831	73621286643	73621286644	73621286645	2,20864E+11	2,34697E+21
20	1,37379E+11	79315912984	2,74758E+11	2,74758E+11	2,74758E+11	8,24275E+11	3,26891E+22

Heronovské trojúhelníky s celočíselnými těžnicemi

Dodnes nebyl nalezen žádný takový trojúhelník.

Problém zpopularizoval známý britský matematik Richard K. Guy

Patrně jsou takto dokonalé trojúhelníky podobně vzácné jako jednorožci.

Ale pozor! Co když nám postačí dvě celočíselné těžnice?

V tomto případě uspějeme.

Existuje nekonečně mnoho heronovských trojúhelníků se dvěma celočíselnými těžnicemi.

Nejmenší takový trojúhelník objevili Ralph Buchholz a Randall Rathbun v roce 1997.

Úlohu řešili pro dvě racionální těžnice a našli trojúhelník [26, 51, 73].

Pro dvě celočíselné těžnice stačí zdvojnásobit délky stran => [52, 102, 146].

Zajímá vás, které dvě těžnice jsou právě ty celočíselné?

Heronovské trojúhelníky s celočíselnými těžnicemi

K výpočtu těžnic v trojúhelníku zadaném stranami skvěle poslouží *Apolloniova věta*.

„Součet čtverců nad dvěma stranami trojúhelníka je roven dvojnásobku součtu čtverce nad polovinou třetí strany a čtverce nad těžnicí k této straně.“ Uff! To zní přímo děsivě!

Raději vyjádříme větu vzorcem $b^2 + c^2 = 2 \left(\left(\frac{a}{2} \right)^2 + t_a^2 \right)$, ze kterého dostaneme:

$$t_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

$$t_a = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot 102^2 + 2 \cdot 146^2 - 52^2} = 4\sqrt{949}$$

$$t_b = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot 146^2 + 2 \cdot 52^2 - 102^2} = 97$$

$$t_c = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot 52^2 + 2 \cdot 102^2 - 146^2} = 35.$$

Heronovské trojúhelníky téměř rovnostranné

Poznámka: *Apolloniova věta* pochází od starořeckého matematika Apollonia z Pergy (žil zhruba v letech 240–190 př. n. l.) a je jednoduchým důsledkem *kosinové věty*.

Kosinovou větu jsme užili v tabulce konsektivních heronovských trojúhelníků.

Výpočty úhlů vedly ke vzorci: $=\text{DEGREES}(\text{ARCCOS}((F3*F3+G3*G3-E3*E3)/(2*F3*G3)))$

n	a	b	c	α (°)	β (°)	γ (°)	$2 \cdot v_c / c$	$2 \cdot v_c / c - \sqrt{3}$
1	3	4	5	36,869898	53,130102	90,000000	0,960000	-0,772051
2	13	14	15	53,130102	59,489763	67,380135	1,493333	-0,238717
3	51	52	53	58,109208	59,963279	61,927513	1,666073	-0,065977
4	193	194	195	59,489763	59,997363	60,512874	1,714241	-0,017810
5	723	724	725	59,863024	59,999811	60,137166	1,727269	-0,004781
6	2701	2702	2703	59,963279	59,999986	60,036735	1,730769	-0,001282
7	10083	10084	10085	59,990159	59,999999	60,009842	1,731707	-0,000344
8	37633	37634	37635	59,997363	60,000000	60,002637	1,731959	-0,000092
9	140451	140452	140453	59,999293	60,000000	60,000707	1,732026	-0,000025
10	524173	524174	524175	59,999811	60,000000	60,000189	1,732044	-0,000007

Heronovské trojúhelníky téměř rovnostranné (konsektivní)

n	a	b	c	α (°)	β (°)	γ (°)	$2 \cdot v_c / c$	$2 \cdot v_c / c - \sqrt{3}$
1	3	4	5	36,869898	53,130102	90,000000	0,960000	-0,772051
2	13	14	15	53,130102	59,489763	67,380135	1,493333	-0,238717
3	51	52	53	58,109208	59,963279	61,927513	1,666073	-0,065977
4	193	194	195	59,489763	59,997363	60,512874	1,714241	-0,017810
5	723	724	725	59,863024	59,999811	60,137166	1,727269	-0,004781
6	2701	2702	2703	59,963279	59,999986	60,036735	1,730769	-0,001282
7	10083	10084	10085	59,990159	59,999999	60,009842	1,731707	-0,000344
8	37633	37634	37635	59,997363	60,000000	60,002637	1,731959	-0,000092
9	140451	140452	140453	59,999293	60,000000	60,000707	1,732026	-0,000025
10	524173	524174	524175	59,999811	60,000000	60,000189	1,732044	-0,000007

Z tabulky lze vyčíst dvě docela zajímavé věci:

- Úhly se velice rychle přibližují k hodnotě 60° ,
- poměr $\frac{2v_c}{c}$ se velice rychle přibližuje k hodnotě $\sqrt{3}$.

Heronovské a pýthagorejské trojúhelníky – příklady

Příklad 1: Kolik existuje pýthagorejských trojúhelníků s odvěsnou délky 2 026?

Příklad 2: Je možné, aby existovalo 2 026 různých PT se stejnou délkou přepony?

Příklad 3: Rozlož HT [13, 20, 21] na dva pýthagorejské a urči poměr jejich obsahů.

Příklad 4: Nejmenší nerozložitelný primitivní HT je [5, 29, 30] s obsahem $S = 72$.

Vznikl redukcí většího, podobného HT. Z jakých PT byl vytvořen původní neredukovaný HT?

Tabulka ukazuje, jak pomocí MS Excelu zjistit příslušné vlastnosti trojúhelníku.

Vytvoření funkce *HeronPythagor* obstaral ChatGPT.

Nalezení rozkladu v Excelu se nám zatím nepovedlo. Ještě uvidíme...

Zkusili jsme to v Pythonu a program vytvořený Google Gemini se zacyklil.

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	Vlastnosti trojúhelníku
13	20	21	Heronovský a rozložitelný
5	29	30	Heronovský, ale nerozložitelný
25	145	150	Heronovský a rozložitelný
3	4	5	Pythagorejský (primitivní)
10	8	6	Pythagorejský (nepřimitivní)
6	7	8	Není heronovský
2	5	7	Není trojúhelník
-2	5	7	Chyba: délky musí být kladné
4	2,5	3	Chyba: musí být celá čísla
5		7	Chyba: nečíselný vstup

Tohle vlastně není konec! Pokračování příště...

Každý heronovský trojúhelník lze umístit do soustavy souřadnic tak, aby jeho vrcholy ležely v mřížových bodech.

V této souvislosti nás čeká:

- Kombinování a natáčení pýthagorejských trojúhelníků,
- Pickova věta,
- goniometrie,
- řešení problému pomocí komplexních čísel,
- rozklad komplexního čísla na Gaussova prvočísla,
- využití skalárních i vektorových součinů...

Snad se toho naši talentovaní nezaleknou a s chutí se pustí do dalšího studia.

Děkujeme za pozornost! A za dva roky (snad) na shledanou!

Použité zdroje

Jaroslav Zhouf: Trojúhelníky s celočíselnými délkami stran – Dva dny s didaktikou matematiky 2010 (Sborník)

Antonín Slavík: Pýthagorejské trojúhelníky a jiné úlohy

Dostupné na: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~slavik/papers/pythagorejske-trojuhelniky-a-jine-ulohy.pdf>

Michal Sláma: Pythagorejské trojúhelníky. Bakalářská práce, Pedagogická fakulta UK, 2015.

Dostupné na: <http://tinyurl.com/ey3hm9wc>

Alice Dohnalová: Heronovské trojúhelníky. Diplomová práce, Pedagogická fakulta JČU, 2010.

Dostupné na: <http://tinyurl.com/kb5ux5c6>

Ron Knott: Pythagorean Right-Angled Triangles

Dostupné na <https://r-knott.surrey.ac.uk/pythag/pythag.html>

Andrew Roibal and Abdulkadir Hassen: Triangles On the Lattice of Integers, dostupné na

<https://users.rowan.edu/~hassen/Papers/TRIANGLES%20ON%20THE%20LATTICE%20OF%20INTEGERS.pdf>

RH Dye & RWD Nickalls: A new algorithm for generating Pythagorean triples

Dostupné na <https://www.nickalls.org/dick/papers/maths/pythagtriples1998.pdf>